

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ  
И ДОПОЛНЕННОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА · 1963 · ЛЕНИНГРАД

## АННОТАЦИЯ

В книге излагаются основы теории специальных функций, наиболее часто встречающихся в приложениях.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и инженеров-исследователей, сталкивающихся в своей работе с применением этих функций. Она может быть использована также в качестве справочника и как учебное пособие при изучении ряда дисциплин, входящих в программу высшей школы.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
Глава I. Гамма-функция . . . . .	11
§ 1.1. Определение гамма-функции . . . . .	11
§ 1.2. Функциональные соотношения для гамма-функции . . . . .	13
§ 1.3. Логарифмическая производная гамма-функции . . . . .	16
§ 1.4. Асимптотическое представление гамма-функции для больших $ z $ . . . . .	20
§ 1.5. Определенные интегралы, связанные с гамма-функцией . . . . .	25
§ 1.6. Сведения о таблицах гамма-функции . . . . .	26
Упражнения . . . . .	27
Глава II. Интеграл вероятности и связанные с ним функции . . . . .	30
§ 2.1. Интеграл вероятности и его основные свойства . . . . .	30
§ 2.2. Асимптотическое представление для интеграла вероятности при больших значениях $ z $ . . . . .	32
§ 2.3. Интеграл вероятности от мнимого аргумента. Функция $F(z)$ . . . . .	33
§ 2.4. Интеграл вероятности от аргумента $x\sqrt{i}$ . Интегралы Френеля . . . . .	35
§ 2.5. Приложение к теории вероятностей . . . . .	38
§ 2.6. Приложение к теории теплопроводности. Остывание плоской поверхности нагретого тела . . . . .	39
§ 2.7. Приложение к теории колебаний. Поперечные колебания бесконечного стержня под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы . . . . .	41
§ 2.8. Сведения о таблицах интеграла вероятности и родственных ему функций . . . . .	43
Упражнения . . . . .	45
Глава III. Интегральная показательная функция и родственные ей специальные функции . . . . .	47
§ 3.1. Интегральная показательная функция и ее основные свойства . . . . .	47
§ 3.2. Асимптотическое представление интегральной показательной функции для $ z  \rightarrow \infty$ . . . . .	50
§ 3.3. Интегральная показательная функция с мнимым аргументом. Интегральные синус и косинус . . . . .	51
§ 3.4. Интегральный логарифм . . . . .	55
§ 3.5. Приложение к радиотехнике. Излучение линейного полуволнового вибратора . . . . .	57
§ 3.6. Сведения о таблицах интегральной показательной функции и других родственных ей функций . . . . .	60
Упражнения . . . . .	61

Глава IV. Ортогональные полиномы . . . . .	63
§ 4.1. Общие замечания об ортогональных полиномах . . . . .	63
§ 4.2. Полиномы Лежандра. Определение и производящая функция . . . . .	64
§ 4.3. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра . . . . .	66
§ 4.4. Интегральные представления для полиномов Лежандра . . . . .	68
§ 4.5. Ортогональность полиномов Лежандра . . . . .	70
§ 4.6. Асимптотическое представление полиномов Лежандра для больших значений индекса $n$ . . . . .	71
§ 4.7. Разложение функций в ряды по полиномам Лежандра . . . . .	74
§ 4.8. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Лежандра . . . . .	79
§ 4.9. Полиномы Эрмита. Определение и производящая функция . . . . .	81
§ 4.10. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита . . . . .	83
§ 4.11. Интегральные представления для полиномов Эрмита . . . . .	85
§ 4.12. Интегральные уравнения для полиномов Эрмита . . . . .	86
§ 4.13. Ортогональность полиномов Эрмита . . . . .	88
§ 4.14. Асимптотическое представление полиномов Эрмита для больших значений индекса $n$ . . . . .	89
§ 4.15. Разложение функций в ряды по полиномам Эрмита . . . . .	91
§ 4.16. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Эрмита . . . . .	97
§ 4.17. Полиномы Лагерра. Определение и производящая функция . . . . .	100
§ 4.18. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра . . . . .	102
§ 4.19. Интегральные представления для полиномов Лагерра. Связь между полиномами Лагерра и Эрмита . . . . .	105
§ 4.20. Интегральное уравнение для полиномов Лагерра . . . . .	107
§ 4.21. Ортогональность полиномов Лагерра . . . . .	108
§ 4.22. Асимптотическое представление полиномов Лагерра для больших значений индекса $n$ . . . . .	110
§ 4.23. Разложение функций в ряды по полиномам Лагерра . . . . .	114
§ 4.24. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Лагерра . . . . .	115
§ 4.25. Приложение к теории распространения электромагнитных волн вдоль длинных линий. Отражение от конца линии, замкнутой на сосредоточенную индуктивность . . . . .	118
§ 4.26. Сведения о таблицах ортогональных полиномов . . . . .	120
<i>Упражнения</i> . . . . .	122
Глава V. Цилиндрические функции . . . . .	127
§ 5.1. Введение . . . . .	127
§ 5.2. Функции Бесселя с целым положительным значком . . . . .	128
§ 5.3. Функции Бесселя с произвольным значком . . . . .	131
§ 5.4. Общее представление цилиндрических функций. Функции Бесселя второго рода . . . . .	134
§ 5.5. Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значком . . . . .	136
§ 5.6. Функции Бесселя третьего рода . . . . .	138
§ 5.7. Функции Бесселя мнимого аргумента . . . . .	139
§ 5.8. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа . . . . .	142
§ 5.9. Вронскиан системы решений уравнения Бесселя . . . . .	144
§ 5.10. Интегральные представления для цилиндрических функций . . . . .	145

§ 5.11. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента . . . . .	153
§ 5.12. Теоремы сложения для цилиндрических функций . . . . .	158
§ 5.13. Нули цилиндрических функций . . . . .	161
§ 5.14. Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям . . . . .	163
§ 5.15. Определенные интегралы, содержащие цилиндрические функции . . . . .	167
§ 5.16. Цилиндрические функции с вещественными положительными аргументом и значком . . . . .	171
§ 5.17. Функции Эйри . . . . .	173
§ 5.18. Сведения о таблицах цилиндрических функций . . . . .	177
<i>Упражнения</i> . . . . .	180
<b>Глава VI. Приложение цилиндрических функций к задачам математической физики</b> . . . . .	<b>185</b>
§ 6.1. Введение . . . . .	185
§ 6.2. Разделение переменных в уравнении $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu$ в цилиндрической системе координат . . . . .	185
§ 6.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для цилиндра. Пример из теории теплопроводности . . . . .	188
§ 6.4. Краевая задача для области, ограниченной двумя параллельными плоскостями . . . . .	191
§ 6.5. Краевая задача для клиновидной области . . . . .	193
§ 6.6. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного вблизи края тонкой проводящей плоскости . . . . .	196
§ 6.7. Приложение к теории теплопроводности. Задача об охлаждении цилиндра . . . . .	198
§ 6.8. Приложение к теории дифракции . . . . .	199
<b>Глава VII. Сферические функции</b> . . . . .	<b>202</b>
§ 7.1. Введение . . . . .	202
§ 7.2. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение и его решение с помощью рядов . . . . .	203
§ 7.3. Сферические функции Лежандра . . . . .	205
§ 7.4. Интегральные представления для сферических функций . . . . .	214
§ 7.5. Функциональные соотношения для сферических функций . . . . .	217
§ 7.6. Представление сферических функций с помощью рядов . . . . .	219
§ 7.7. Вронскиан системы решений уравнения Лежандра . . . . .	225
§ 7.8. Рекуррентные соотношения . . . . .	227
§ 7.9. Сферические функции с целым положительным индексом. Связь с полиномами Лежандра . . . . .	229
§ 7.10. Сферические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа . . . . .	231
§ 7.11. Асимптотические представления сферических функций при больших значениях $ \nu $ . . . . .	234
§ 7.12. Присоединенные сферические функции . . . . .	238
§ 7.13. Сведения о таблицах сферических функций . . . . .	247
<i>Упражнения</i> . . . . .	248

Глава VIII. Приложение сферических функций к задачам математической физики . . . . .	252
§ 8.1. Введение . . . . .	252
§ 8.2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат . . . . .	253
§ 8.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для сферической области . . . . .	255
§ 8.4. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного внутри полый проводящей сферы . . . . .	257
§ 8.5. Применение метода частных решений к краевой задаче для конической области . . . . .	258
§ 8.6. Разделение переменных в уравнении Лапласа в вырожденных эллипсоидальных координатах . . . . .	262
§ 8.7. Краевые задачи для эллипсоидов вращения . . . . .	264
§ 8.8. Пример из математической физики. Притяжение вытянутого однородного эллипсоида . . . . .	268
§ 8.9. Краевая задача для герболоида вращения . . . . .	269
§ 8.10. Тороидальные координаты . . . . .	271
§ 8.11. Краевая задача для тора. Пример из электростатики . . . . .	274
§ 8.12. Краевая задача для области, ограниченной двумя пересекающимися сферами . . . . .	276
§ 8.13. Биполярные координаты и их приложения к краевым задачам математической физики . . . . .	280
§ 8.14. Приложение сферических функций к интегрированию уравнения Гельмгольца . . . . .	284
Глава IX. Гипергеометрические функции . . . . .	286
§ 9.1. Гипергеометрический ряд и его аналитическое продолжение . . . . .	286
§ 9.2. Элементарные свойства гипергеометрической функции . . . . .	290
§ 9.3. Предел суммы гипергеометрического ряда при $z \rightarrow 1$ и $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ . . . . .	292
§ 9.4. Гипергеометрическая функция, рассматриваемая как функция своих параметров . . . . .	294
§ 9.5. Функциональные соотношения для гипергеометрической функции . . . . .	295
§ 9.6. Специальные функциональные соотношения . . . . .	300
§ 9.7. Формулы для аналитического продолжения гипергеометрической функции в особых случаях . . . . .	304
§ 9.8. Представления различных функций через гипергеометрическую функцию . . . . .	307
§ 9.9. Вырожденная гипергеометрическая функция . . . . .	309
§ 9.10. Дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции и его интегралы. Вырожденная гипергеометрическая функция второго рода . . . . .	312
§ 9.11. Интегральные представления для вырожденных гипергеометрических функций . . . . .	316
§ 9.12. Асимптотические представления вырожденных гипергеометрических функций для больших значений аргумента . . . . .	319
§ 9.13. Представления различных функций через вырожденные гипергеометрические функции . . . . .	322
§ 9.14. Обобщенные гипергеометрические функции . . . . .	327
§ 9.15. Сведения о таблицах гипергеометрических функций . . . . .	329
Упражнения . . . . .	329

Глава X. Функции параболического цилиндра . . . . .	334
§ 10.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах . . . . .	334
§ 10.2. Функции Эрмита первого рода . . . . .	336
§ 10.3. Функциональные соотношения для функций Эрмита . . . . .	340
§ 10.4. Рекуррентные соотношения для функций Эрмита . . . . .	342
§ 10.5. Интегральные представления для функций Эрмита . . . . .	343
§ 10.6. Асимптотические представления функций Эрмита для больших значений аргумента . . . . .	345
§ 10.7. Приложение к математической физике. Краевая задача для параболического цилиндра . . . . .	348
§ 10.8. Приложение к квантовой механике . . . . .	352
<i>Упражнения</i> . . . . .	352
Литература . . . . .	355

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена одному из разделов математики, знание которого представляется весьма существенным для научных работников и инженеров-исследователей, имеющих дело с математическими расчетами.

Книга содержит систематическое изложение основ теории важнейших специальных функций, а также некоторые приложения этой теории к конкретным задачам математической физики и техники.

При отборе материала, вошедшего в книгу, ставилась цель изложить с достаточной полнотой те вопросы, которые представляют наибольший интерес с точки зрения приложений, что естественным образом привело к известному ограничению чисто теоретической части; значительное внимание уделено технике вычислений, описанию существующих таблиц и т. д.

Некоторые свойства рассматриваемых функций, которые не включены в основной текст, но являются полезными в приложениях, приведены в примерах, помещенных в виде упражнений к соответствующим главам.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с основами теории функций комплексного переменного, без привлечения которой невозможно сколько-нибудь глубокое изучение специальных функций. Однако с целью облегчить пользование книгой нематематикам автор стремился по возможности ограничиться лишь немногими сведениями из теории функций комплексного переменного. В частности, это обстоятельство заставило автора отказаться от принятого в некоторых монографиях порядка изложения, при котором определения ряда специальных функций даются через контурные интегралы, наиболее удобные для представления этих функций.

Объем сведений по теории функций комплексного переменного, который необходим для понимания основного текста настоящей книги, перекрывается содержанием первой и третьей глав второй части третьего тома „Курс высшей математики“ В. И. Смирнова, причем наиболее существенными являются разделы теории, изложенные в § 1—7, 9—21, 55—59, 64—67 и 70 курса. Особое внимание следует обратить на такие вопросы, как классификация функций, контурное интегрирование, исследование свойств функций, определен-



ных посредством рядов или интегралов, и аналитическое продолжение.

Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений не предполагается известной, однако знание этой теории в объеме, например, § 95—99 цитированного выше курса представляется весьма желательным.

Область применения других разделов математического анализа (математическая физика, интегральные преобразования и т. д.) ограничивается исключительно отдельными примерами, относящимися к приложениям специальных функций, и отсутствие детального знакомства с этими разделами не является существенным препятствием к чтению настоящей книги.

Предполагается, что читатель встречался на практике с необходимостью использования специальных функций, поэтому в ряде случаев отсутствует мотивировка целесообразности их введения; по той же причине автор счел возможным при выборе способа определения функций и методов получения их свойств руководствоваться в первую очередь стремлением к простоте изложения, а не историческими или иными соображениями.

Расположение материала по главам подчинено стремлению сделать отдельные части книги в известной степени независимыми друг от друга и дать возможность изучать более простые классы функций без знакомства с теорией функций более общего типа. Как пример укажем на выделение полиномов Лежандра и функций Бесселя целых номеров из общей теории сферических и цилиндрических функций, а также на построение теории сферических функций без использования соответствующих свойств гипергеометрической функции.

Выбор приложений преследует, главным образом, цель иллюстрировать различные стороны применения специальных функций к проблемам физики и техники и не ставит задачу дать сколько-нибудь подробное освещение соответствующих разделов математической физики. Наиболее подробно рассмотрен вопрос о применении цилиндрических и особенно сферических функций, недостаточно освещенный в отечественной литературе.

Во втором издании книги в ряд разделов внесены различные дополнения и изменения.

В четвертой главе предложен новый улучшенный вариант доказательства теоремы разложения по полиномам Эрмита, позволяющий распространить эту теорему на более широкий класс функций. Кроме того, увеличено число примеров, демонстрирующих технику разложения функций в ряды по полиномам Эрмита, Лагерра и др.

В пятую главу введен раздел, посвященный теории функций Эйри, играющих важную роль при получении асимптотических представлений многих специальных функций и часто встречающихся в математической физике.

Полностью переработана девятая глава книги, содержащая изложение теории гипергеометрических функций. Автор надеется, что в настоящем виде эта глава окажется полезной физикам-теоретикам и другим специалистам, сталкивающимся с применением гипергеометрических функций, и частично заполнит пробел в литературе по этому вопросу.

Увеличено число задач, предложенных в качестве упражнений и содержащих полезный дополнительный материал, не вошедший в основной текст. Одновременно исключены отдельные примеры, не представляющие большого интереса.

Обновлен список цитированных работ.

Автор выражает глубокую признательность И. П. Скальской за помощь в подготовке настоящего издания.

Май 1962 г.

*Н. Н. Лебедев*

# ГЛАВА I

## ГАММА-ФУНКЦИЯ

### § 1.1. Определение гамма-функции

К числу наиболее простых и важных специальных функций относится гамма-функция, знание свойств которой является необходимой предпосылкой для изучения многих других специальных функций, например цилиндрических, гипергеометрической и т. д.

Теория гамма-функции рассматривается в курсах анализа и теории функций комплексного переменного; поэтому в данной главе мы ограничимся лишь ее кратким обзором, отсылая читателя за различными деталями к существующей литературе\*).

Гамма-функция  $\Gamma(z)$  для любых значений комплексного переменного  $z$ , вещественная часть которых положительна, определяется по формуле

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.1.1)$$

Интеграл (1.1.1) может быть записан в виде суммы интегралов:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = P(z) + Q(z), \quad (1.1.2)$$

первый из которых сходится абсолютно и равномерно относительно  $z$  в области  $R(z) \geq \delta > 0$ , второй — в области  $R(z) \leq A < \infty$  \*\*). Так как  $f(t, z) = e^{-t} t^{z-1}$  — непрерывная функция  $t$  и целая функция  $z$  при  $0 < t < \infty$ , то из равномерной сходимости интегралов следует,

\*) См., например, В. И. Смирнов [1], Уиттекер и Ватсон [1].

\*\*) В данных областях интегралы  $P(z)$  и  $Q(z)$  мажорируются сходящимися интегралами

$$\bar{P} = \int_0^1 e^{-t} t^{\delta-1} dt, \quad \bar{Q} = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{A-1} dt.$$

что функции  $P(z)$  и  $Q(z)$  регулярны в указанных областях \*). Принимая во внимание, что  $\delta$  может быть выбрано произвольно малым, а число  $A$  — как угодно большим, приходим к выводу, что функция  $P(z)$  регулярна в полуплоскости  $R(z) > 0$  и  $Q(z)$  есть целая функция.

Таким образом,  $\Gamma(z)$  представляет функцию, регулярную в области  $R(z) > 0$ .

Значение гамма-функции в остальной части плоскости комплексного переменного должно быть найдено путем аналитического продолжения функции, определенной равенством (1.1.1). Для этого заменим показательную функцию в интеграле  $P(z)$  ее разложением в степенной ряд и выполним почленное интегрирование. Тогда получим

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}, \quad (1.1.3) \end{aligned}$$

причем законность изменения порядка интегрирования и суммирования вытекает из абсолютной сходимости \*\*).

Члены ряда (1.1.3) представляют регулярные функции от  $z$  при  $z \neq 0, -1, -2, \dots$ , и ряд сходится равномерно в области

\*) Мы пользуемся следующей общей теоремой:  
Несобственный интеграл

$$F(z) = \int_a^b f(t, z) dt,$$

взятый по конечному или бесконечному промежутку  $(a, b)$ , есть функция комплексного переменного  $z$ , регулярная в области  $D$ , если выполнены условия: 1)  $f(t, z)$  — непрерывная функция двух переменных при  $z$ , принадлежащем области  $D$  и  $a < t < b$ ; 2)  $f(t, z)$  — регулярная функция  $z$  в области  $D$  при всяком  $t$ , принадлежащем открытому промежутку  $(a, b)$ ; 3) интеграл сходится равномерно относительно  $z$  в области  $D$ .

Для собственных интегралов теорема верна при выполнении первых двух условий в замкнутом промежутке  $(a, b)$ . (См., например, В. И. Смирнов в [1], стр. 257—260.)

\*\*) Действительно, выражение

$$\int_0^1 |t^{z-1}| dt \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} t^k \right| = \int_0^1 t^{R(z)-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \int_0^1 e^{tR(z)-1} dt$$

сходится при  $R(z) > 0$ .

$|z+k| \geq \delta > 0$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $\delta$  — произвольно малое число), так как в этой области он мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \delta}.$$

Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса и учитывая произвольность в выборе  $\delta$ , заключаем, что сумма ряда (1.1.3) есть мероморфная функция с простыми полюсами в точках  $z=0, -1, -2, \dots$ . Полученная функция совпадает с интегралом  $P(z)$  при  $R(z) > 0$ , следовательно, является его аналитическим продолжением.

Функция  $\Gamma(z)$  отличается от  $P(z)$  на слагаемое  $Q(z)$ , которое, по доказанному, есть целая функция. Таким образом,  $\Gamma(z)$  представляет мероморфную функцию комплексного переменного  $z$  с простыми полюсами  $z=0, -1, -2, \dots$ .

Аналитическое выражение  $\Gamma(z)$ , пригодное во всей области определения этой функции, имеет вид

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (1.1.4)$$

Из (1.1.4) вытекает, что в окрестности полюса  $z = -n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) функция  $\Gamma(z)$  допускает представление

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \Omega(z+n), \quad (1.1.5)$$

где  $\Omega(z+n)$  — правильная часть.

## § 1.2. Функциональные соотношения для гамма-функции

Гамма-функция  $\Gamma(z)$  удовлетворяет трем функциональным соотношениям:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.2.1)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (1.2.2)$$

$$2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2z), \quad (1.2.3)$$

играющим важную роль при различных преобразованиях и вычислениях, в которых встречается эта функция.

Для доказательства первого из указанных соотношений предположим, что  $R(z) > 0$ , и воспользуемся интегральным представлением (1.1.1).

Интегрируя по частям, находим

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z).$$

Справедливость полученного результата для любых комплексных  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  вытекает из принципа аналитического продолжения\*), так как обе стороны рассматриваемого равенства остаются регулярными функциями  $z$  на всей плоскости комплексного переменного, за вычетом указанных особых точек.

Чтобы вывести функциональное соотношение (1.2.2), примем временно, что  $0 < R(z) < 1$ , и снова воспользуемся равенством (1.1.1). Мы получим тогда

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+t)} s^{-z} t^{z-1} ds dt,$$

или, если ввести новые переменные ( $u, v$ ), положив

$$u = s + t, \quad v = \frac{t}{s},$$

то

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u} v^{z-1} \frac{du dv}{1+v} = \int_0^{\infty} \frac{v^{z-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

на основании известной формулы теории определенных интегралов\*\*).

В соответствии с принципом аналитического продолжения полученное равенство сохраняет силу на всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Чтобы доказать соотношение (1.2.3), известное под названием формулы удвоения, предположим, что  $R(z) > 0$ . Тогда, на основании (1.1.1), имеем

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+t)} (2\sqrt{st})^{2z-1} t^{-\frac{1}{2}} ds dt = \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} \alpha d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

\*) Согласно этому принципу, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем, равенство  $f(z) = \varphi(z)$ , установленное для некоторой области  $D$  плоскости комплексного переменного, сохраняет силу в более широкой области  $D^*$ , включающей  $D$ , для которой обе части рассматриваемого равенства остаются регулярными функциями. Тот же результат имеет место, если равенство выполняется на каком-либо отрезке, принадлежащем  $D^*$ . См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 67.

\*\*) См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 232.

где новые переменные  $(\alpha, \beta)$  связаны со старыми переменными  $(s, t)$  соотношениями  $\sqrt{s} = \alpha$ ,  $\sqrt{t} = \beta$ .

Если поменять в полученной формуле  $\alpha$  и  $\beta$  местами и сложить затем оба равенства, то придем к более симметричному представлению

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta = \\ &= 4 \int_{(\sigma)} e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

где интегрирование производится по сектору  $0 \leq \alpha < \infty$ ,  $0 \leq \beta \leq \alpha$ . Вводя новые переменные  $(u, v)$  по формулам

$$u = \alpha^2 + \beta^2, \quad v = 2\alpha\beta,$$

находим:

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} v^{2z-1} dv \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}} du = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-v} v^{2z-1} dv \int_0^{\infty} e^{-w^2} dw = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2z). \end{aligned}$$

Распространение результата на любые комплексные значения  $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$  производится, как и выше, с помощью принципа аналитического продолжения.

Применим выведенные функциональные соотношения для вычисления  $\Gamma(z)$  при некоторых частных значениях переменного  $z$ .

Воспользовавшись (1.2.1) и замечая, что  $\Gamma(1) = 1$ , находим по индукции

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.4)$$

Далее, полагая в (1.1.1)  $z = \frac{1}{2}$ , получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \quad (1.2.5)$$

и применение формулы (1.2.1) дает:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.6)$$

и т. д.

В заключение докажем, основываясь на равенстве (1.2.2), что функция  $\Gamma(z)$  не имеет нулей на плоскости комплексного переменного.

В самом деле, точки  $z = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) не являются нулями функции, так как  $\Gamma(n) = (n-1)!$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $\Gamma(n) = \infty$  ( $n = 0, -1, -2, \dots$ ). Для остальных значений  $z$  справедлива формула (1.2.2), откуда непосредственно следует требуемый результат, так как, допустив, что точка  $z = z_0$  есть нуль  $\Gamma(z)$ , мы пришли бы к заключению, что рассматриваемая точка является полюсом функции  $\Gamma(1-z)$ .

Важным следствием установленного свойства гамма-функции является вывод, что  $[\Gamma(z)]^{-1}$  есть целая функция.

### § 1.3. Логарифмическая производная гамма-функции

Теория гамма-функции тесно связана с теорией другой специальной функции  $\psi(z)$ , которая представляет собой логарифмическую производную  $\Gamma(z)$ , т. е.

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (1.3.1)$$

Так как  $\Gamma(z)$  — мероморфная функция и не имеет нулей, то  $\psi(z)$  не может иметь других особых точек, кроме полюсов гамма-функции  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Из (1.1.5) следует, что разложение  $\psi(z)$  в окрестности точки  $z = -n$  имеет вид

$$\psi(z) = -\frac{1}{z+n} + \Omega(z+n), \quad (1.3.2)$$

поэтому  $\psi(z)$  есть мероморфная функция с простыми полюсами  $z = 0, -1, -2, \dots$

Функция  $\psi(z)$  удовлетворяет функциональным соотношениям, которые получаются из равенств (1.2.1—3), если взять от них логарифмические производные. Эти соотношения имеют вид:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad (1.3.3)$$

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z, \quad (1.3.4)$$

$$\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 = 2\psi(2z). \quad (1.3.5)$$

Полученные равенства могут быть использованы для вычисления  $\psi(z)$  при специальных значениях  $z$ .

Обозначая

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad (1.3.6)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера,  $\gamma = 0,57721566 \dots$ , и применяя формулу (1.3.3), находим

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.7)$$



Далее, полагая в (1.3.5)  $z = \frac{1}{2}$ , получаем

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2, \quad (1.3.8)$$

и формула (1.3.3) дает

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.9)$$

Функция  $\psi(z)$  допускает простые интегральные представления в форме определенных интегралов, содержащих переменное  $z$  в качестве параметра.

Чтобы вывести эти представления, заметим прежде всего, что в силу равномерной сходимости интеграла (1.1.1) производная гамма-функции при  $R(z) > 0$  выражается формулой

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t \, dt. \quad (1.3.10)$$

Если заменить логарифм в подынтегральном выражении через интеграл Фруллани \*)

$$\ln t = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \, dx, \quad R(t) > 0, \quad (1.3.11)$$

то придем к представлению  $\Gamma'(z)$  в форме двойного интеграла, который, как нетрудно показать, будет абсолютно сходящимся при  $R(z) > 0$ . Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования и написать

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{\infty} (e^{-x} - e^{-xt}) e^{-t} t^{z-1} \, dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left[ e^{-x} \Gamma(z) - \int_0^{\infty} e^{-t(x+1)} t^{z-1} \, dt \right]. \end{aligned}$$

Вводя новое переменное интегрирования  $u = t(x+1)$ , находим, что значение интеграла в квадратных скобках будет  $(x+1)^{-z} \Gamma(z)$ , откуда непосредственно вытекает первое из интегральных представлений для  $\psi(z)$ :

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x}, \quad R(z) > 0. \quad (1.3.12)$$

\*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], n° 458.

Чтобы получить второе интегральное представление для  $\psi(z)$ , запишем формулу (1.3.12) в виде

$$\psi(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^z x} \right]$$

и заменим во втором интеграле переменную интегрирования, положив  $x+1 = e^t$ . Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\ln(1+\delta)}^{\infty} \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt \right] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{\ln(1+\delta)}^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt - \int_{\ln(1+\delta)}^{\delta} \frac{e^{-t}}{t} dt \right]. \end{aligned}$$

Так как второй интеграл стремится к нулю, когда  $\delta \rightarrow 0$ , то

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.3.13)$$

Полагая здесь  $z=1$  и вычитая полученное равенство из (1.3.13), находим

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt, \quad R(z) > 0, \quad (1.3.14)$$

или, если ввести новую переменную интегрирования  $x = e^{-t}$ ,

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^{z-1}}{1-x} dx, \quad R(z) > 0. \quad (1.3.15)$$

Из формулы (1.3.15) можно вывести новое важное представление для  $\psi(z)$  в виде аналитического выражения, имеющего смысл при любых значениях  $z \neq 0, -1, -2, \dots$ , т. е. во всей области, где определена эта функция. Это представление получается, если разложить  $(1-x)^{-1}$  в ряд по возрастающим степеням  $x$  и выполнить затем почленное интегрирование\*). Мы имеем тогда

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right). \quad (1.3.16)$$

\*) Законность этой операции может быть легко обоснована.

Ряд (1.3.16), члены которого суть регулярные при  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  функции, сходится равномерно относительно  $z$  в круге  $|z| < a$  произвольно большого радиуса  $a$ , так как для  $n \geq N > a$

$$\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right| < \frac{a+1}{(n+1)(n-a)}$$

и ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a+1}{(n+1)(n-a)}$$

сходится.

Поэтому, за исключением произвольно малой окрестности полюсов  $z = 0, -1, -2, \dots$ , левая и правая части равенства (1.3.16) суть регулярные функции и первоначальное ограничение  $R(z) > 0$ , при котором была доказана эта формула, можно отбросить согласно принципу аналитического продолжения. Если заменить в (1.3.16)  $z$  на  $z+1$ , проинтегрировать полученный ряд между пределами  $(0, z)$  и перейти затем от логарифмов к числам, то получим известное разложение гамма-функции в бесконечное произведение Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right), \quad (1.3.17)$$

которое, со своей стороны, может быть положено в основу теории рассматриваемой функции.

В заключение укажем на некоторые формулы, связанные с постоянной  $\gamma$ , введенной выше.

Полагая в (1.3.12—13)  $z = 1$ , имеем по определению

$$\gamma = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1+x} - e^{-x} \right) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt. \quad (1.3.18)$$

Далее, из (1.3.10) следует

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt, \quad (1.3.19)$$

откуда, интегрируя по частям, находим

$$\gamma = \int_0^1 \ln t d(e^{-t} - 1) + \int_1^{\infty} \ln t de^{-t} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

или, если заменить во втором интеграле  $t$  на  $\frac{1}{t}$ ,

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt. \quad (1.3.20)$$

### § 1.4. Асимптотическое представление гамма-функции для больших $|z|$

Для того чтобы описать поведение заданной функции  $f(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$  и  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ , во многих случаях достаточно найти для нее выражение вида

$$f(z) = \varphi(z)[1 + r(z)], \quad (1.4.1)$$

где  $\varphi(z)$  — некоторая функция более простой структуры, чем  $f(z)$ , а  $r(z)$  в пределах рассматриваемого сектора плоскости комплексного переменного равномерно стремится к нулю, когда  $|z| \rightarrow \infty$ .

Формулы указанного типа носят название асимптотических представлений для функций  $f(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Из (1.4.1) следует, что отношение функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  стремится к единице при неограниченном возрастании  $|z|$ , т. е. вытекает асимптотическое равенство обеих функций:

$$f(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\approx} \varphi(z), \quad \alpha \leq \arg z \leq \beta. \quad (1.4.2)$$

Оценка модуля остаточного члена  $r(z)$  дает величину относительной ошибки, допускаемой при замене  $f(z)$  на  $\varphi(z)$  при больших, но конечных  $|z|$ .

Более точное описание поведения функции  $f(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , чем то, которое дается формулой (1.4.1), может быть получено, если удастся установить равенства

$$f(z) = \varphi(z) \left[ \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} + r_N(z) \right], \quad a_0 = 1, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4.3)$$

где  $z^N r_N(z)$  равномерно стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ , частным случаем которых, соответствующим  $N = 0$ , является формула (1.4.1).

В таком случае пишут

$$f(z) \approx \varphi(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \alpha \leq \arg z \leq \beta, \quad (1.4.4)$$

и называют правую часть асимптотическим рядом для  $f(z)$  при больших  $|z|$ .

Следует заметить, что в данном определении не содержится требования, чтобы рассматриваемый ряд сходиллся в обычном смысле, напротив, как правило, он оказывается расходящимся. Тем не менее полученный асимптотический ряд весьма полезен, так как, взяв конечное число членов, мы получим для достаточно больших  $|z|$  сколь угодно точную аппроксимацию функции  $f(z)$ .

В настоящей книге читатель найдет большое число примеров асимптотических представлений и рядов различных функций (§ 1.4, 2.2, 3.2, 4.6, 4.14, 4.22, 5.11 и т. д.). Общая теория асимптотических рядов рассматривается в курсах анализа \*).

Чтобы получить асимптотическое представление для гамма-функции  $\Gamma(z)$ , удобно начать с вывода соответствующей формулы для логарифма этой функции.

Предположим временно, что  $z$  есть комплексное число, вещественная часть которого положительна, и воспользуемся интегральным представлением (1.3.13). Заменяя в этой формуле  $z$  на  $z+1$ , имеем тождественно:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t-1} \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-tz} dt - \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-tz} dt, \end{aligned}$$

или, на основании равенства (1.3.11),

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \ln z + \frac{1}{2z} - \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-tz} dt.$$

Интегрируя последнее равенство между пределами (1,  $z$ ) и принимая во внимание, что

$$\ln \Gamma(z+1) = \ln \Gamma(z) + \ln z,$$

находим \*\*):

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(z) &= \left( z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + 1 + \\ &+ \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{e^{-tz} - e^{-t}}{t} dt, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

где  $R(z) > 0$ .

Заметим, что функция

$$f(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{1}{t}, \quad (1.4.6)$$

\*) См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 394—397; Уиттекер и Ватсон [1], гл. 8; Эрдейи [1].

\*\*) Выбор пути интегрирования не имеет значения. Законность интегрирования под знаком интеграла вытекает из абсолютной сходимости.

которая входит под знак интеграла, непрерывна при  $t \geq 0$  и  $f(0) = \frac{1}{12}$ , в чем легко убедиться, разложив  $f(t)$  в степенной ряд в окрестности точки  $t = 0$ .

Чтобы упростить формулу (1.4.5), необходимо вычислить значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} f(t) e^{-t} dt. \quad (1.4.7)$$

Последнее может быть выполнено при помощи следующего искусственного приема.

Положим

$$J = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{2}} dt. \quad (1.4.8)$$

Тогда имеем

$$J - I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} \left[ f(t) - \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{2}\right) \right] dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t},$$

откуда

$$\begin{aligned} J &= (J - I) + I = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right] \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right) + \frac{e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}}{2t} \right] dt = - \left. \frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right|_0^{\infty} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

С другой стороны, полагая в (1.4.5)  $z = \frac{1}{2}$ , находим

$$J - I = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2}, \quad (1.4.10)$$

поэтому

$$I = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi. \quad (1.4.11)$$

Принимая во внимание полученный результат, мы можем представить формулу (1.4.5) в следующем виде:

$$\ln \Gamma(z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \omega(z), \quad (1.4.12)$$

где

$$\omega(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz} dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.4.13)$$

Пользуясь найденным выражением (1.4.12), нетрудно получить асимптотическое представление для  $\Gamma(z)$ . Предположим, что  $|z| \gg 1$ ,  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ . Интеграл (1.4.13) остается при этом еще сходящимся, и, интегрируя по частям, мы находим

$$\omega(z) = \frac{1}{z} \left[ f(0) + \int_0^{\infty} f'(t) e^{-tz} dt \right]. \quad (1.4.14)$$

При возрастании  $t$  функция  $f(t)$  монотонно убывает\*), поэтому  $f'(t) \leq 0$ ,  $|f'(t)| = -f'(t)$  и мы имеем

$$|\omega(z)| \leq \frac{1}{|z|} \left[ f(0) - \int_0^{\infty} f'(t) dt \right] = \frac{2f(0)}{|z|},$$

т. е.

$$|\omega(z)| \leq \frac{1}{6|z|}, \quad |z| \gg 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.4.15)$$

Потенцируя равенство (1.4.12), находим

$$\Gamma(z) = e^{(z-\frac{1}{2}) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + r(z)], \quad (1.4.16)$$

$$|z| \gg 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2},$$

где

$$r(z) = e^{\omega(z)} - 1.$$

Из оценки (1.4.15) следует:

$$|r(z)| \leq \frac{C}{|z|}, \quad (1.4.17)$$

где  $C$  — некоторая абсолютная постоянная.

Таким образом, формула (1.4.16) дает искомое асимптотическое представление  $\Gamma(z)$  в секторе  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ , причем остаток  $r(z)$  есть

---

\*) Это непосредственно следует из разложения  $f(t)$  на частные дроби:

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4\pi^2 k^2},$$

которое может быть получено также элементарным образом. (См. Г. М. Ф и Х-тенгольц [1], н° 501.)

величина порядка  $|z|^{-1}$  при  $|z| \rightarrow \infty$  \*):

$$r(z) = O(|z|^{-1}). \quad (1.4.18)$$

Чтобы получить асимптотическое представление для гамма-функции, пригодное в других секторах плоскости комплексного переменного, воспользуемся формулой (1.2.2). Предположим, что  $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi - \delta$ , где  $\delta$  — произвольно малое фиксированное положительное число. Тогда  $\arg(-z) = \arg z - \pi$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(-z) \leq -\delta$ . На основании (1.2.1 — 2) имеем

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{(-z) \Gamma(-z) \sin \pi z}, \quad (1.4.19)$$

причем, согласно ранее выведенной формуле (1.4.16),

$$\Gamma(-z) = e^{-\left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - \pi i + z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + O(|z|^{-1})]. \quad (1.4.20)$$

С другой стороны, в рассматриваемом секторе

$$\begin{aligned} \sin \pi z &= \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = -\frac{e^{-i\pi z}}{2i} (1 - e^{2i\pi z}) = \\ &= -\frac{e^{-i\pi z}}{2i} \left(1 - \frac{1}{z} \cdot ze^{2\pi iz}\right) = -\frac{e^{-i\pi z}}{2i} [1 + O(|z|^{-1})], \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

так как  $ze^{2\pi iz}$  ограничено.

Подставляя (1.4.20—21) в (1.4.19), приходим снова к формуле (1.4.16).

Аналогичный результат получается для сектора

$$-(\pi - \delta) \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, для любых  $|z| \gg 1$ ,  $|\arg z| \leq \pi - \delta$  имеет место асимптотическое представление:

$$\Gamma(z) = e^{\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + O(|z|^{-1})]. \quad (1.4.22)$$

Путем некоторого усложнения приведенных выше рассуждений можно вывести более точную формулу:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) = e^{\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} & \left[ 1 + \frac{1}{12z} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} + O(|z|^{-4}) \right]. \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

\*)  $f(z)$  есть величина  $\varphi(z)$  при  $z \rightarrow z_0$ ,  $f(z) = O(\varphi(z))$ , если в окрестности  $z_0$  выполняется неравенство  $|f(z)| \leq A|\varphi(z)|$ , где  $A$  — некоторая постоянная.



Если  $z = x$  — вещественное положительное число, то формула (1.4.16) может быть записана в виде

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} [1 + r(x)], \quad (1.4.24)$$

и для  $r(x)$  получается более точная оценка, чем та, которая дается неравенством (1.4.17). Действительно, при  $z = x > 0$  мы имеем

$$|\omega(x)| \leq f(0) \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{12x}, \quad (1.4.25)$$

откуда следует

$$|r(x)| \leq e^{\frac{1}{12x}} - 1. \quad (1.4.26)$$

В заключение укажем на асимптотическую формулу для факториала  $n!$ , которая непосредственно вытекает из формул (1.4.24) и (1.2.4):

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}. \quad (1.4.27)$$

### § 1.5. Определенные интегралы, связанные с гамма-функцией

Класс интегралов, которые могут быть выражены через гамма-функцию, очень обширен, и мы ограничимся здесь лишь немногочисленными примерами, имея в виду главным образом получить некоторые формулы, необходимые в различных разделах настоящей книги.

Одной из наиболее простых и важных формул этого типа является равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}, \quad (1.5.1)$$

где  $R(p) > 0$ ,  $R(z) > 0$ , которое легко доказывается для положительных  $p$ , если произвести замену переменной интегрирования, положив  $s = pt$ , и затем воспользоваться интегральным представлением (1.1.1). Распространение полученного результата на любые комплексные значения  $p$ , вещественная часть которых положительна, осуществляется с помощью принципа аналитического продолжения.

В качестве второго важного интеграла, который может быть выражен через гамма-функцию, рассмотрим интеграл

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad R(x) > 0, \quad R(y) > 0, \quad (1.5.2)$$

известный в литературе под названием бета-функции.

Легко видеть, что при указанном ограничении интеграл (1.5.2) сходится и представляет собой регулярную функцию каждого из переменных  $x$  и  $y$ .

Если ввести переменное интегрирования  $u = \frac{t}{1-t}$ , то для бета-функции получается новое выражение:

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du, \quad R(x) > 0, \quad R(y) > 0. \quad (1.5.3)$$

Воспользуемся теперь формулой (1.5.1) и положим в ней  $p = 1 + u$ ,  $z = x + y$ . Тогда находим

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt, \quad (1.5.4)$$

откуда, после подстановки в (1.5.3) и перемены порядка интегрирования, получается:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt \int_0^{\infty} e^{-ut} u^{x-1} du = \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Законность перестановки обосновывается путем доказательства абсолютной сходимости двойного интеграла. Таким образом, связь функции бета с функцией гамма устанавливается формулой

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (1.5.6)$$

пользуясь которой легко вывести все свойства  $B(x, y)$ .

### § 1.6. Сведения о таблицах гамма-функции

Для функции  $\Gamma(x)$  и связанных с ней функций существует большое число различных таблиц, из которых мы назовем, в качестве наиболее доступных и подробных, следующие таблицы.

1. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Изд. АН СССР, 1959:

$\Gamma(x)$ ,	$x = 1(0,001)2$ ,	5 дес. зн.
$\Gamma(n+1)$ ,	$n = 1(1)50$ ,	6 зн. ц.

(Сокращенная запись  $x = 1(0,001)2$  обозначает, что аргумент  $x$  изменяется от 1 до 2 с интервалом в 0,001.)

2. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$\begin{array}{ll} \Gamma(x+1), & x = 0(0,01)4, & 4-5 \text{ зн. ц.}, \\ \psi(x+1), & x = 0(0,01)1, & 4 \text{ дес. зн.} \end{array}$$

3. Шпильрейн Я. Н., тит. ред., Таблицы специальных функций, ГТТИ, 1934:

$$\Gamma(x), \quad x = 1(0,002)2, \quad 5 \text{ дес. зн.}$$

4. Хайяши (Hayashi K.), Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin, 1930:

$$\Gamma(x), \quad x = -5(0,01)1(0,001)2(0,01)5, \quad 5 \text{ дес. зн.}$$

5. British Association for the Advancement of Science. Mathematical Tables, vol. 1, Cambridge, 1951:

$$\left. \begin{array}{ll} \Gamma(x+1), & x = 0(0,01)1, \\ \psi(x+1), & x = 0(0,01)1, \\ & x = 10(0,1)60, \end{array} \right\} 12 \text{ дес. зн.}$$

6. Абрамов А. А., Таблицы  $\ln \Gamma(z)$  в комплексной области, Изд. АН СССР, 1953:

$$\ln \Gamma(x+iy), \quad x = 1(0,01)2, \quad y = 0(0,01)4, \quad 6 \text{ дес. зн.}$$

7. Table of the Gamma Function for Complex Arguments, National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, № 34, 1954:

$$\ln \Gamma(x+iy), \quad x = 0(0,1)10, \quad y = 0(0,1)10, \quad 12 \text{ дес. зн.}$$

Библиографические сведения о других таблицах гамма-функции можно найти в справочниках А. В. Лебедева и Р. М. Федоровой [1], Н. М. Буруновой [1], Флетчера, Миллера и Розенхеда [1], содержащих весьма полное описание таблиц специальных функций, изданных до 1959 г.

### Упражнения

1. Доказать, что при вещественном  $y$

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}, \quad \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi y}.$$

2. Воспользовавшись (1.5.6), проверить равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2yt}{(\operatorname{ch} t)^{2x}} dt = 2^{2x-2} \frac{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}{\Gamma(2x)},$$

$$R(x) > 0, \quad R(x) > |R(y)|.$$

3. Показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu} \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu} \theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}, \quad R(\nu) > -1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu} \theta \sin^{\nu} \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right)},$$

$$R(\mu) > -1, \quad R(\nu) > -1.$$

4. Получить функциональное соотношение

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)$$

(В. И. Смирнов [1], стр. 272).

5. Вывести функциональное соотношение

$$3\psi(3z) = \psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{3}\right) + \psi\left(z + \frac{2}{3}\right) + 3\ln 3.$$

У к а з а н и е. Вычислить логарифмическую производную от обеих частей равенства примера 4.

6. Получить интегральное представление для квадрата гамма-функции

$$\Gamma^2(z) = 2^{2-2z} \int_0^{\infty} t^{2z-1} K_0(t) \, dt, \quad R(z) > 0,$$

где  $K_0(t)$  — функция Макдональда (§ 5.7).

У к а з а н и е. Воспользоваться формулами (5.10.23), (1.5.1) и интегралом примера 2.

7. Получить асимптотические формулы:

$$\Gamma(z+\alpha) = e^{\left(z+\alpha-\frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + O(|z|^{-1})],$$

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta} \left[ 1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2z} + O(|z|^{-2}) \right],$$

$|z| \gg 1$ ,  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ,  $\alpha, \beta$  — произвольные фиксированные числа.

У к а з а н и е. Воспользоваться результатами § 1.4.

8. Получить асимптотическую формулу

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi|y|}{2}} |y|^{x-\frac{1}{2}} [1+r(x,y)],$$

где  $r(x,y) \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$  равномерно в полосе  $|x| \leq \alpha$  ( $\alpha$  — фиксированное число).

9. При помощи контурного интегрирования показать, что для любых значений комплексного переменного  $z$  справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt,$$

где  $t^{-z} = e^{-z \ln t}$ ,  $-\pi < \arg t < \pi$  и контур  $C$  состоит из отрезков  $(-\infty, -a)$ ,  $(-\infty, -a)$  нижнего и верхнего берегов разреза  $(-\infty, 0)$  и замыкающей их дуги круга  $|t| = a$  произвольного радиуса  $a$  (В. И. Смирнов [1], стр. 274).

10. Неполная гамма-функция  $\gamma(z, \alpha)$  и ее дополнение  $\Gamma(z, \alpha)$  определяются при помощи формул:

$$\gamma(z, \alpha) = \int_0^\alpha e^{-t} t^{z-1} dt, \quad R(z) > 0, \quad |\arg \alpha| < \pi;$$

$$\Gamma(z, \alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad |\arg \alpha| < \pi,$$

следовательно,

$$\gamma(z, \alpha) + \Gamma(z, \alpha) = \Gamma(z).$$

Показать, что при фиксированном  $\alpha$   $\Gamma(z, \alpha)$  — целая функция от  $z$  и  $\gamma(z, \alpha)$  — мероморфная функция  $z$  с полюсами в точках  $z = 0, -1, -2, \dots$

11. Получить функциональные соотношения:

$$\gamma(z+1, \alpha) = z\gamma(z, \alpha) - e^{-\alpha}\alpha^z,$$

$$\Gamma(z+1, \alpha) = z\Gamma(z, \alpha) + e^{-\alpha}\alpha^z.$$

12. Получить представление  $\gamma(z, \alpha)$  в виде ряда

$$\gamma(z, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{k+z}}{k!(k+z)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

## ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ I

Смирнов В. И. [1]; Кузьмин Р. О. [1]; Уиттекер и Ватсон [1]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], т. I; Нильсен [1]; Лёш и Шоблик [1].  
Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

## ГЛАВА II

### ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

#### § 2.1. Интеграл вероятности и его основные свойства

Интегралом вероятности  $\Phi(z)$  называется функция, которая для любых комплексных  $z$  определяется при помощи равенства

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (2.1.1)$$

где интегрирование производится по произвольному пути, соединяющему начало координат с точкой  $t=z$ . Так как подынтегральное выражение является целой функцией комплексного переменного  $t$ , вид пути интегрирования не играет роли, и можно считать, что интегрирование производится вдоль отрезка прямой, соединяющей точки  $t=0$  и  $t=z$ . По известной теореме  $\Phi(z)$  представляет целую функцию, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся при любых значениях переменного  $z$ \*). Для того чтобы получить это разложение, достаточно подставить в (2.1.1) соответствующий ряд для показательной функции и проинтегрировать его почленно. Мы находим тогда

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad (2.1.2)$$

$$|z| < \infty,$$

---

\*) Интеграл  $\varphi(z) = \int_a^z f(t) dt$ , взятый по произвольному пути, принад-

лежащему односвязной области  $D$ , в которой  $f(t)$  регулярна, есть регулярная функция в этой области. См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 25 и 27—28. Теорема справедлива и в том случае, когда  $f(a) = \infty$  или  $a = \infty$ , при условии, что несобственный интеграл сходится.

так как процесс интегрирования степенного ряда является законным. Из формулы (2.1.2) следует, что  $\Phi(z)$  — нечетная функция от  $z$ . При вещественных значениях аргумента  $\Phi(z)$  представляет собой вещественную монотонно возрастающую функцию, график которой изображен на рис. 1.

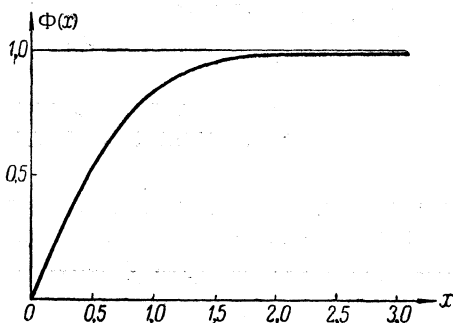


Рис. 1.

Значение функции при нуле  $\Phi(0) = 0$ , а при возрастании  $z$  быстро приближается к предельному значению  $\Phi(\infty) = 1$ , ибо

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.1.3)$$

Разница между  $\Phi(z)$  и этим предельным значением может быть представлена в форме

$$1 - \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (2.1.4)$$

Интеграл вероятности встречается в различных разделах прикладной математики, в частности, в теории вероятностей и теории ошибок, в математической теории теплопроводности и в других разделах математической физики (§ 2.5—2.6). В литературе, наряду с интегралом вероятности  $\Phi(z)$ , часто рассматриваются родственные ему функции, именно функция ошибок

$$\operatorname{Erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z),$$

и ее дополнение

$$\operatorname{Erfc}(z) = \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(z)].$$

Многие интегралы более сложного вида также могут быть выражены через интеграл вероятности. Так, например, методом дифференцирования по параметру легко показать, что для  $R(z) > 0$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt = e^z [1 - \Phi(\sqrt{z})].$$

## § 2.2. Асимптотическое представление для интеграла вероятности при больших значениях $|z|$

Для того чтобы получить асимптотическое представление функции  $\Phi(z)$  при больших значениях  $|z|$ , воспользуемся формулой (2.1.4) и преобразуем входящий в нее интеграл с помощью интегрирования по частям.

Мы находим последовательно:

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt &= \frac{e^{-z^2}}{2z} - \frac{1}{2} \int_z^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \frac{e^{-z^2}}{2z} - \frac{e^{-z^2}}{2^2 z^3} + \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2^2} \int_z^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt = e^{-z^2} \left[ \frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 z^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 z^7} + \dots \right. \\ &\left. \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} z^{2n+1}} \right] + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \int_z^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} dt, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$1 - \Phi(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2z^2)^k} + r_n(z) \right], \quad (2.2.1)$$

где

$$r_n(z) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^n} z e^{z^2} \int_z^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} dt. \quad (2.2.2)$$

Предположим, что  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ , где  $\delta$  — произвольное малое положительное число, и выберем в качестве пути интегрирования в (2.2.2) полупрямую, начинающуюся в точке  $t=z$  и параллельную вещественной оси\*). Полагая  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ , мы имеем, что на

\*) Возможность такой деформации пути интегрирования следует из теоремы Коши.



рассматриваемой прямой  $t = u + iy$  ( $x \leq u < \infty$ ),

$$|e^{z^2 - t^2}| = e^{x^2 - u^2}, \quad |t|^{-(2n+3)} \leq |z|^{-(2n+3)}, \quad |t| \leq u \sec \varphi,$$

поэтому из оценки по модулю следует:

$$|r_n(z)| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^n |z|^{2n+2}} \sec \varphi \int_x^\infty e^{x^2 - u^2} u \, du = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(2|z|^2)^{n+1}} \sec \varphi.$$

Таким образом, имеем:

$$|r_n(z)| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(2|z|^2)^{n+1}} \sec \varphi \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(2|z|^2)^{n+1} \sin \delta}. \quad (2.2.3)$$

Полученный результат показывает, что произведение  $z^{2n} r_n(z)$  в рассматриваемом секторе равномерно стремится к нулю, когда  $|z| \rightarrow \infty$ , т. е. ряд, стоящий в правой части равенства

$$1 - \Phi(z) \approx \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi z}} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2z^2)^k} \right],$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (2.2.4)$$

является асимптотическим для функции  $1 - \Phi(z)$  (§ 1.4). Величина ошибки, которая допускается, если аппроксимировать рассматриваемую функцию суммой конечного числа членов данного ряда, выражается формулой (2.2.3), причем для каждого  $z$  существует свое оптимальное значение  $n$ , для которого ошибка будет наименьшей. Для вещественных положительных  $z$  ошибка не превосходит величины первого отброшенного члена.

Асимптотическое представление для интеграла вероятности в секторе  $\frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \delta$  может быть получено из (2.2.1) с помощью соотношения  $\Phi(z) = -\Phi(-z)$ .

Построение асимптотического представления для сектора  $\frac{\pi}{2} - \delta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} + \delta$  требует отдельного рассуждения (ср. (2.3.5)).

### § 2.3. Интеграл вероятности от мнимого аргумента. Функция $F(z)$

В приложениях, наряду с интегралом вероятности от вещественного аргумента, встречаются также случаи, когда аргумент функции представляет комплексное число. Одним из наиболее простых и интересных среди них является случай чисто мнимого аргумента

$z = ix$ ,  $x$  — вещественно. Воспользовавшись определением интеграла вероятности (2.1.1) и выбрав в качестве пути интегрирования отрезок мнимой оси, получим после подстановки  $t = iu$ :

$$\frac{\Phi(x)}{i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (2.3.1)$$

Интеграл в правой части неограниченно возрастает при  $x \rightarrow \infty$ , поэтому в приложениях удобнее рассматривать функцию

$$F(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{u^2} du, \quad (2.3.2)$$

которая остается ограниченной при любых вещественных  $z$ . В общем случае комплексных  $z$  функция  $F(z)$ , определенная равенством (2.3.2),

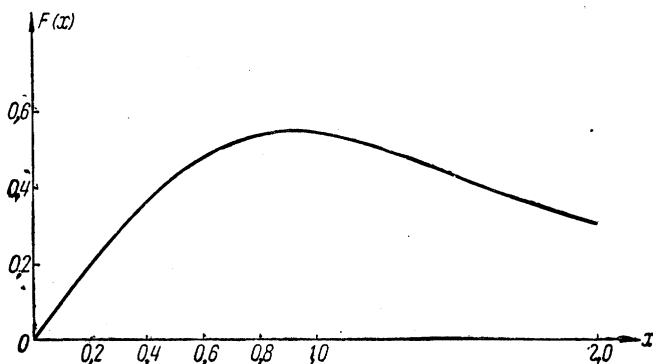


Рис. 2.

будет целой, и выбор пути интегрирования в (2.3.2) является вполне произвольным. Для того чтобы получить разложение этой функции в степенной ряд, заметим, что  $F(z)$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$F'(z) + 2zF(z) = 1 \quad (2.3.3)$$

с начальным условием  $F(0) = 0$ . Подставляя в это уравнение ряд

$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , получаем путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $z$  рекуррентные соотношения  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  ( $k+1$ )  $a_{k+1} + 2a_{k-1} = 0$ , откуда после простых вычислений находим

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{1 \cdot 3 \dots (2k+1)}, \quad |z| < \infty. \quad (2.3.4)$$

Для оценки поведения  $F(z)$  при вещественных  $z \rightarrow \infty$  можно воспользоваться правилом Лопитала, повторное применение которого к (2.3.2) дает  $\lim_{z \rightarrow \infty} 2zF(z) = 1$ , откуда следует асимптотическая формула:

$$F(z) \approx \frac{1}{2z}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.3.5)$$

График функции  $F(z)$  для вещественных  $z \geq 0$  изображен на рис. 2. Максимум функции достигается при  $z = 0,924\dots$  и равен  $F_{\max} = 0,541\dots$

Функция  $F(z)$  встречается в теории распространения электромагнитных волн вдоль земной поверхности и в других задачах математической физики.

## § 2.4. Интеграл вероятности от аргумента $x\sqrt{i}$ . Интегралы Френеля

Другой интересный с точки зрения приложений случай представляет собой интеграл вероятности с комплексным аргументом  $z = x\sqrt{i} = \frac{x}{\sqrt{2}}(1+i)$ ,  $x$  — вещественное положительное число.

Выбирая в качестве пути интегрирования в (2.1.1) отрезок биссектрисы координатного угла и вводя новое вещественное переменное  $u$  по формуле  $t = u\sqrt{i}$ , мы можем представить значение интеграла вероятности для этого случая в виде.

$$\frac{\Phi(x\sqrt{i})}{\sqrt{i}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-tu^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos u^2 du - t \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin u^2 du. \quad (2.4.1)$$

Интегралы в правой части могут быть выражены через функции

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad (2.4.2)$$

где интегрирование производится по любому пути, соединяющему начало координат с точкой  $t = z$ .

Функции  $C(z)$  и  $S(z)$  называются интегралами Френеля. Так как подинтегральные выражения в (2.4.2) суть целые функции комплексного переменного  $t$ , выбор пути интегрирования не имеет значения, и обе функции  $C(z)$  и  $S(z)$  представляют собой целые функции от  $z$ . При вещественном  $z$  интегралы Френеля вещественны. Графики этих

функций для этого случая изображены на рис. 3. Обе функции обращаются в нуль при  $z=0$  и имеют колебательный характер\*). Наибольшие из максимумов будут соответственно  $C(1) = 0,779893$ ,

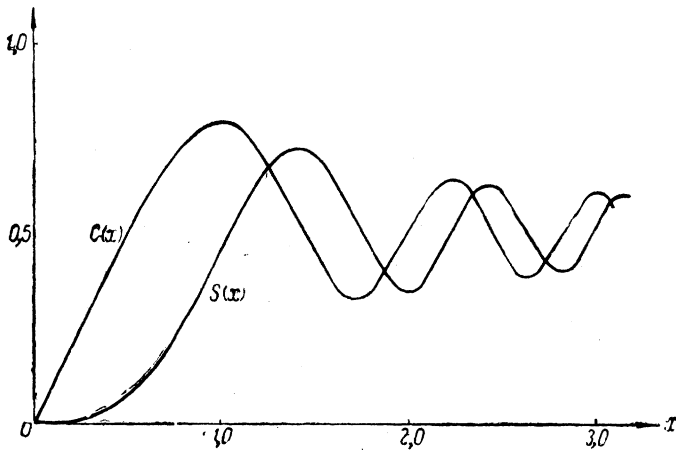


Рис. 3.

$S(\sqrt{2}) = 0,713972\dots$  При  $z \rightarrow \infty$  каждая из функций стремится к пределу:

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2},$$

так как на основании известных формул\*\*)

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad (2.4.3)$$

Разлагая тригонометрические функции, стоящие под знаком интегралов (2.4.2), в степенные ряды и интегрируя их почленно, получаем представления для интегралов Френеля в виде рядов, сходящихся

\*) Производные рассматриваемых функций выражаются формулами

$$C'(z) = \cos \frac{\pi z^2}{2}, \quad S'(z) = \sin \frac{\pi z^2}{2},$$

поэтому  $C(z)$  имеет экстремумы в точках  $z = \pm\sqrt{2n+1}$ ,  $S(z)$  — в точках  $z = \pm\sqrt{2n}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ).

\*\*\*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], п° 484.

при любых значениях  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\pi t^2}{2}\right)^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \frac{z^{4k+1}}{4k+1}, \\ S(z) &= \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi t^2}{2}\right)^{2k+1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \frac{z^{4k+3}}{4k+3}, \quad |z| < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

Связь интегралов Френеля с интегралом вероятности устанавливается формулами:

$$\begin{aligned} C(z) \pm iS(z) &= \int_0^z e^{\pm \frac{i\pi t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{\mp \frac{i\pi}{4}}} e^{-u^2} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{\mp \frac{i\pi}{4}}\right), \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ e^{\frac{i\pi}{4}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{-\frac{i\pi}{4}}\right) + e^{-\frac{i\pi}{4}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{\frac{i\pi}{4}}\right) \right], \\ S(z) &= \frac{1}{2i\sqrt{2}} \left[ e^{\frac{i\pi}{4}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{-\frac{i\pi}{4}}\right) - e^{-\frac{i\pi}{4}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{\frac{i\pi}{4}}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

Пользуясь найденными соотношениями, можно вывести свойства рассматриваемых функций из соответствующих свойств интеграла вероятности. В частности, воспользовавшись результатами § 2.2, получаем следующие асимптотические представления интегралов Френеля, пригодные для больших значений  $|z|$  и  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4} - \delta$ :

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z} \left[ B(z) \cos \frac{\pi z^2}{2} - A(z) \sin \frac{\pi z^2}{2} \right], \\ S(z) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z} \left[ A(z) \cos \frac{\pi z^2}{2} + B(z) \sin \frac{\pi z^2}{2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.4.7)$$

где

$$A(z) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \alpha_{2k}}{(\pi z^2)^{2k}} + O(|z|^{-4N-4}),$$

$$B(z) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \alpha_{2k+1}}{(\pi z^2)^{2k+1}} + O(|z|^{-4N-6}), \quad \alpha_k = 1 \cdot 3 \dots (2k-1), \quad \alpha_0 = 1.$$

Интегралы Френеля встречаются в различных областях физики и техники, например в теории дифракции, теории поперечных колебаний стержня и т. д. Многие интегралы более сложного вида могут быть выражены через функции  $C(z)$  и  $S(z)$  \*).

### § 2.5. Приложение к теории вероятностей

Пусть  $x$  — случайная величина, отклонение которой от среднего значения  $\bar{x}$  подчинено закону Гаусса, т. е. вероятность появления отклонений, лежащих в интервале  $(x - \bar{x}, x - \bar{x} + dx)$  выражается формулой

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (2.5.1)$$

где  $\sigma$  — некоторая постоянная, называемая стандартным отклонением \*\*). Тогда вероятность того, что отклонение  $x - \bar{x}$  будет находиться в интервале  $(\alpha, \beta)$ , дается равенством

$$\begin{aligned} W(\alpha < x - \bar{x} < \beta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha+\bar{x}}^{\beta+\bar{x}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (2.5.2) \end{aligned}$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

В частности, если  $\alpha = -\infty$ ,  $\beta = \infty$ , то  $W = 1$ , как и следовало ожидать.

Полагая  $\alpha = -\delta$ ,  $\beta = \delta$ , получаем вероятность того, что отклонение  $x - \bar{x}$  по абсолютному значению не превосходит заданной величины  $\delta$ :

$$W(|x - \bar{x}| \leq \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right). \quad (2.5.3)$$

\*) См., например, Градштейн И. С. и Рыжик М. И.. [1].

\*\*) См., например, Уиттекер и Робинсон [1].

Если известны результаты  $n$  измерений величины  $x$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n$  — большое число), то значения постоянных  $\bar{x}$  и  $\sigma$  могут быть вычислены по формулам:

$$x \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Тогда вероятность того, что отклонение по абсолютному значению больше  $\delta$ , будет:

$$W(|x - \bar{x}| > \delta) = 1 - \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right). \quad (2.5.4)$$

Значение  $\delta = \delta_B$ , для которого

$$W(|x - \bar{x}| \leq \delta) = W(|x - \bar{x}| > \delta),$$

называется вероятной ошибкой. Из (2.5.3—4) следует, что значение этой величины определяется уравнением

$$\Phi\left(\frac{\delta_B}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2},$$

откуда, воспользовавшись таблицами для интеграла вероятности, находим:

$$\delta_B = 0,67449\sigma.$$

В виде примера приложения этих формул вычислим вероятность того, что длина детали, изготавливаемой на автомате и имеющей среднюю длину 10 см, со стандартным отклонением  $\sigma = 1$  мм, отклоняется от средней не более чем на 1 мм.

Мы имеем

$$W(|x - 10| \leq 0,1) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,683,$$

т. е. такое отклонение будет у 68% изготавливаемых деталей. Вероятная ошибка составляет в данном случае  $\approx 0,7$  мм.

## § 2.6. Приложение к теории теплопроводности. Остывание плоской поверхности нагретого тела

Рассмотрим задачу теории теплопроводности об охлаждении тела, заполняющего полупространство  $x > 0$ , нагретого до температуры  $T_0$  и излучающего тепло со своей поверхности  $x = 0$  в окружающую среду, находящуюся при нулевой температуре.

Если обозначить через  $T = T(x, t)$  температуру в произвольной точке  $x$  тела в момент времени  $t$  и положить  $\tau = \frac{kt}{c\rho}$ ,  $h = \frac{\lambda}{k}$ , где  $k$ ,  $c$  и  $\rho$  — коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность тела,  $\lambda$  — коэффициент теплоотдачи, то рассматриваемая задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.6.1)$$

при начальном условии

$$T|_{\tau=0} = T_0 \quad (2.6.2)$$

и граничных условиях

$$\frac{\partial T}{\partial x} - hT|_{x=0} = 0, \quad T|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow T_0. \quad (2.6.3)$$

Решение задачи легко получается путем применения преобразования Лапласа\*). Идея этого метода состоит в том, что вместо  $T$  находится сперва преобразование Лапласа от этой функции  $\bar{T}$ , связанное с  $T$  соотношением

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} T e^{-p\tau} d\tau, \quad (2.6.4)$$

где  $p$  — надлежаще выбранное комплексное число.

Уравнения для определения  $\bar{T} = \bar{T}(x, p)$  получаются из исходных уравнений (2.6.1—3), если умножить первое и третье из этих уравнений на  $e^{-p\tau}$  и проинтегрировать по промежутку  $(0, \infty)$ . Мы находим тогда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} &= p\bar{T} - T_0, \\ \frac{d\bar{T}}{dx} - h\bar{T}|_{x=0} &= 0, \quad \bar{T}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{T_0}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.5)$$

откуда после простых вычислений имеем

$$\bar{T} = \frac{T_0}{p} \left[ 1 - \frac{h}{h + \sqrt{p}} e^{-x\sqrt{p}} \right], \quad (2.6.6)$$

где  $R(\sqrt{p}) > 0$  при  $R(p) > 0$ .

Решение задачи получается теперь обращением равенства (2.6.4), что может быть выполнено с помощью существующих таблиц, содержащих преобразования Лапласа различных функций\*\*), или путем применения формулы обращения Римана — Меллина

$$T = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{T} e^{p\tau} dp, \quad (2.6.7)$$

где интегрирование производится по прямой ( $L$ ), параллельной мнимой оси и выбранной таким образом, чтобы особые точки  $\bar{T}$  лежали слева от нее.

Наибольший интерес представляет вычисление температуры поверхности тела.

\*) См., например, М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1], гл. VI.

\*\*) См., например, В. А. Диткин и П. И. Кузнецов [1], Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [2], т. I.



Полагая в (2.6.6)  $x=0$ , мы имеем

$$\bar{T}|_{x=0} = \frac{T_0}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+h)} = T_0 \left[ \frac{1}{p-h^2} - \frac{h}{p-h^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \right], \quad (2.6.8)$$

и переход к первичной функции  $T|_{x=0}$  осуществляется проще всего с помощью теоремы умножения \*).

Выбирая  $\bar{f}_1 = \frac{h}{\sqrt{p}}$ ,  $\bar{f}_2 = \frac{1}{p-h^2}$ , находим из таблиц  $f_1(\tau) = \frac{h}{\sqrt{\pi\tau}}$ ,  $f_2(\tau) = e^{h^2\tau}$ , и применение этой теоремы дает:

$$T|_{x=0} = T_0 \left[ e^{h^2\tau} - \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{h^2(\tau-t)} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right] = T_0 e^{h^2\tau} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\sqrt{\tau}} e^{-s^2} ds \right],$$

откуда

$$T|_{x=0} = T_0 e^{h^2\tau} [1 - \Phi(h\sqrt{\tau})], \quad (2.6.9)$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Из асимптотической формулы (2.2.1) следует, что спадание температуры поверхности при больших  $\tau$  пропорционально  $\tau^{-\frac{1}{2}}$ :

$$T|_{x=0} \approx \frac{T_0}{h\sqrt{\pi\tau}}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.6.10)$$

Значение температуры в любой точке тела также может быть выражено в замкнутой форме через интеграл вероятности.

## § 2.7. Приложение к теории колебаний.

### Поперечные колебания бесконечного стержня под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы

Предположим, что в точке  $x=0$  бесконечного стержня в момент  $t=0$  внезапно приложена сила  $Q$ , значение которой в дальнейшем остается постоянным.

Если обозначить через  $\rho$ ,  $E$ ,  $I$  плотность на единицу длины стержня, модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения

\* Эта теорема утверждает, что если  $\bar{f}_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) — преобразования Лапласа от функций  $f_\nu(\tau)$ , то первичная функция для  $\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$  будет

$$f(\tau) = \int_0^\tau f_1(t) f_2(\tau-t) dt.$$

стержня, то смещение  $u$  в произвольной точке  $x > 0$  определится из уравнений \*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, \\ u|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau}|_{\tau=0} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|_{x=0} = \frac{Q}{2EI}, \quad u|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

где переменное  $\tau$  пропорционально времени  $t$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} t$ .

Решение задачи может быть найдено путем применения преобразования Лапласа (§ 2.6). Полагая

$$\bar{u} = \int_0^{\infty} u e^{-p\tau} d\tau, \quad (2.7.2)$$

получаем для определения  $\bar{u}$  уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} + p^2 \bar{u} &= 0, \\ \frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^3 \bar{u}}{dx^3}|_{x=0} &= \frac{Q}{2EI p}, \\ \bar{u}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{d\bar{u}}{dx}|_{x \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.3)$$

откуда после несложных вычислений следует

$$\bar{u} = \frac{Q}{4EI p^2 i} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{-pi}}}{\sqrt{-pi}} - \frac{e^{-x\sqrt{pi}}}{\sqrt{pi}} \right], \quad (2.7.4)$$

где  $R(\sqrt{\pm pi}) > 0$  при  $R(p) > 0$ .

Для отыскания  $u$  по известному  $\bar{u}$  удобно воспользоваться теоремой умножения.

Полагая

$$\bar{f}_1 = \frac{Q}{2EI p^2}, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{2l} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{-pi}}}{\sqrt{-pi}} - \frac{e^{-x\sqrt{pi}}}{\sqrt{pi}} \right],$$

находим с помощью таблиц \*\*)

$$f_1 = \frac{Q}{2EI} \tau, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \sin \frac{x^2}{4\tau} + \cos \frac{x^2}{4\tau} \right].$$

\*) См., например, А. И. Лурье [1].

\*\*) В. А. Диткин и П. И. Кузнецов [1].

откуда на основании указанной теоремы

$$u = \frac{Q}{2EI\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} \left( \sin \frac{x^2}{4t} + \cos \frac{x^2}{4t} \right) \frac{\tau-t}{\sqrt{t}} dt = \frac{Qx\tau}{2EI} f \left( \frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (2.7.5)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} (\sin y^2 + \cos y^2) \frac{1-y^2}{y^2} dy. \quad (2.7.6)$$

Функция  $f(x)$  может быть выражена через интегралы Френеля  $C(z)$  и  $S(z)$  (§ 2.4).

Применяя дважды формулу интегрирования по частям, находим:

$$\begin{aligned} f(x) = & \left(1 + \frac{2}{3}x^2\right) \left[ \frac{1}{2} - C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) \right] - \\ & - \left(1 - \frac{2}{3}x^2\right) \left[ \frac{1}{2} - S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) \right] + \\ & + \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \left[ (1+x^2) \frac{\sin x^2}{x} + (1-x^2) \frac{\cos x^2}{x} \right]. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

## § 2.8. Сведения о таблицах интеграла вероятности и родственных ему функций

Интеграл вероятности  $\Phi(x)$  принадлежит к числу хорошо табулированных функций. Укажем, например, на следующие таблицы.

1. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Изд. АН СССР, 1959:

$$\Phi(x), \quad x = 0(0,001)2,5(0,01)3, \quad 5-7 \text{ дес. зн.}$$

2. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$\Phi(x), \quad x = 0(0,01)3, \quad 4-6 \text{ дес. зн.}$$

3. Шпильрейн Я. Н., тит. ред., Таблицы специальных функций, ГТТИ, 1934:

$$\Phi(x), \quad x = 0(0,001)1,5(0,01)2,9, \quad 4 \text{ дес. зн.}$$

4. Хайяши (Hayashi K.), Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin, 1930:

$$\Phi(x), \quad x = 0(0,01)3, \quad 5-6 \text{ дес. зн.}$$

5. Tables of Probability Functions, National Bureau of Standards, vol. 1, 1941:

$$\Phi(x), \quad x = 0(0,0001)1(0,001)5,6, \quad 15 \text{ дес. зн.}$$

$$1 - \Phi(x), \quad x = \frac{1}{4}(0,01)10, \quad 8 \text{ зн. ц.}$$

Значения функции  $F(x)$  (§ 2.3) можно найти в таблицах:

6. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$F(x) e^{x^2}, \quad x = 0(0,01)2, \quad 3-4 \text{ дес. зн.}$$

7. Террилл и Свенни (Terrill H. M. and Swenny L.), J. of Franklin Inst., **237**, 495—497, 1944; **238**, 220—222, 1944:

$$F(x) e^{x^2}, \quad x = 0(0,01)4, \quad 6 \text{ дес. зн.}$$

8. Миллер и Гордон (Miller W. L. and Gordon A. R.), J. Phys. Chem., **35**, 2785—2884, 1931:

$$F(x), \quad x = 0(0,01)4(0,05)7,5(0,1)10(0,2)12, \quad 6-9 \text{ дес. зн.}$$

Значения интеграла вероятности и родственных функций от комплексного аргумента можно найти в таблицах Карпова К. А., Изд. АН СССР, 1954, 1958, Фаддеевой В. Н. и Терентьевой Н. М., Изд. АН СССР, 1954.

Из таблиц специальных функций, содержащих интегралы Френеля, могут быть отмечены следующие:

9. Таблицы интегралов Френеля, Изд. АН СССР, 1953:

$$S(x), C(x), \quad x = 0(0,001)25, \quad 7 \text{ дес. зн.}$$

10. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad x = 0(0,1)1(0,5)50, \quad 4 \text{ дес. зн.}$$

11. Ватсон Г. Н. [1]:

$$C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad x = 0(0,02)1(0,5)50, \quad 6 \text{ дес. зн.}$$

12. Хайяши (Hayashi K.), Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin, 1930:

$$C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad x = 0(0,02)1(0,5)50, \quad 5 \text{ дес. зн.}$$

13. Ван Вингарден и Шин (Van Wijngaarden A. and Scheen W. L.), Tables of Fresnel Integrals, Amsterdam, 1949:

$$C(x), S(x), \quad x = 0(0,01)20 \quad 5 \text{ дес. зн.}$$

Сведения о других таблицах интеграла вероятности и родственных функций содержатся в справочниках А. В. Лебедева и Р. М. Федоровой [1], Н. М. Буруновой [1], Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

## Упражнения

1. Показать, что функция  $\varphi(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{z^2} \Phi(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $\varphi' - 2z\varphi = 1$ , и получить отсюда разложение

$$\Phi(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z^2)^n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}, \quad |z| < \infty.$$

2. Воспользовавшись результатом примера 1 и формулой (2.4.5), вывести разложения интегралов Френеля:

$$C(x) = x \left[ \alpha(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} + \beta(x) \sin \frac{\pi x^2}{2} \right],$$

$$S(x) = x \left[ \alpha(x) \sin \frac{\pi x^2}{2} - \beta(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} \right],$$

где

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi x^2)^{2k}}{1 \cdot 3 \dots (4k+1)}, \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi x^2)^{2k+1}}{1 \cdot 3 \dots (4k+3)}.$$

3. Интегрируя по частям, доказать, что

$$\int \Phi(x) dx = x\Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + C.$$

4. Показать, что если  $\bar{f}$  — преобразование Лапласа от функции  $f(x)$ :

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx,$$

то

$$\bar{\Phi} = \frac{e^{\frac{p^2}{4}}}{p} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{p}{2}\right) \right].$$

5. Получить интегральные представления

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin 2zt dt,$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2zt}{t} dt.$$

Указание. Заменить  $\sin 2zt$  степенным рядом и выполнить почленное интегрирование.

6. Получить интегральные представления для квадрата интеграла вероятности:

$$\Phi^2(z) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$$

$$[1 - \Phi(z)]^2 = \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Указание. Представить  $\Phi^2(z)$  в виде двойного интеграла по области  $(0 \leq s \leq z, 0 \leq t \leq z)$  и перейти к полярным координатам.

7. Вывести формулы:

$$1 - \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} dt,$$

$$[1 - \Phi(z)]^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-2z^2} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} \sqrt{t} \Phi(t) dt.$$

Указание. Вторая формула получается из первой после перехода в двойном интеграле по области  $(0 \leq s \leq \infty, 0 \leq t \leq s)$  к новым переменным  $\alpha = s + t, \beta = st$ .

8. Доказать равенства

$$C^2(z) \pm S^2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \frac{\pi z^2}{2} (1 \mp t^2)}{1 \mp t^2} dt.$$

9. Показать, что

$$C(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi x^2}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t) dt, \quad S(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi x^2}{2}} J_{\frac{1}{2}}(t) dt,$$

где  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя порядка  $\nu$  (§ 5.8).

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ II

Нильсен [2]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], т. 2; Лёш и Шоблик [1].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

## ГЛАВА III

# ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

### § 3.1. Интегральная показательная функция и ее основные свойства

Интегральная показательная функция  $Ei(z)$  определяется как интеграл:

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt, \quad |\arg(-z)| < \pi, \quad (3.1.1)$$

взятый по произвольному пути  $L$  в плоскости  $t$ , разрезанной вдоль положительной вещественной оси (рис. 4).

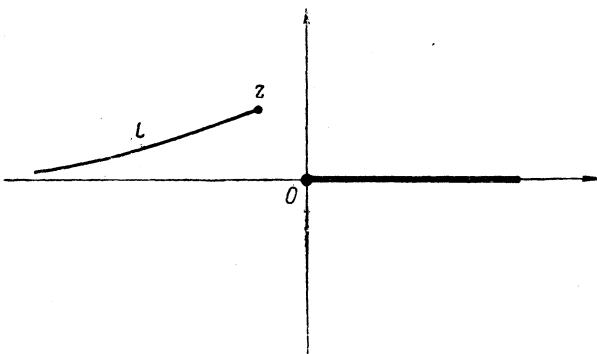


Рис. 4.

В полученной таким образом односвязной области подынтегральное выражение представляет регулярную функцию комплексного переменного  $t$ , поэтому значение интеграла не зависит от вида пути и в соответствии с общей теоремой  $Ei(z)$  является регулярной функцией  $z^*$ .

\*) Отметим, что в качестве пути интегрирования в (3.1.1) можно взять также отрезок прямой  $-\infty < R(t) \leq R(z)$ ,  $I(t) = I(z)$ , проходящей через точку  $z$  и параллельной вещественной оси.

Если заменить  $z$  на  $-z$  и  $t$  на  $-t$ , то формула (3.1.1) принимает вид

$$-Ei(-z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi. \quad (3.1.2)$$

Функция  $-Ei(-z)$  регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ . График этой функции для  $z=x > 0$  изображен на рис. 5; рассматриваемая функция монотонно убывает от значения  $-Ei(0) = +\infty$  до значения  $-Ei(-\infty) = 0^*$ .

Для того чтобы получить разложение в ряд интегральной показательной функции, представим равенство (3.1.1) в виде

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^t}{t} dt + \int_{-1}^0 \frac{e^t - 1}{t} dt + \\ + \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt + \int_{-1}^z \frac{dt}{t}$$

и заметим, что сумма первых двух интегралов есть некоторая абсолютная постоянная, которую мы обозначим через  $C$ . Полагая в первом интеграле  $t = -u^{-1}$ , а во втором  $t = -u$ , находим:

$$C = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-\frac{1}{u}}}{u} du, \quad (3.1.3)$$

откуда, на основании (1.3.20), следует, что  $C$  совпадает с постоянной Эйлера:  $C = \gamma = 0,5772157\dots$  Таким образом, мы имеем\*\*)

$$Ei(z) = \gamma + \ln(-z) + \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt, \quad |\arg(-z)| < \pi. \quad (3.1.4)$$

\*) Производная  $\frac{d}{dx}(-Ei(-x)) = -\frac{e^{-x}}{x} < 0$  при  $x > 0$ .

\*\*\*) В данной книге под  $\ln z$  понимается однозначная ветвь функции, определяемая равенством

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad |\arg z| < \pi.$$

Аналогично функция  $z^\nu$  ( $\nu$  — произвольное) обозначает  $e^{\nu \ln z}$  и т. д.

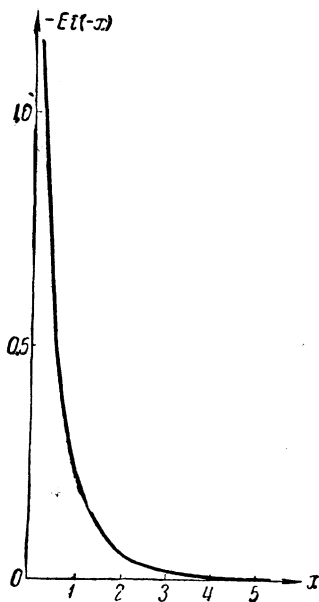


Рис. 5.



Интеграл в правой части последнего равенства, подынтегральное выражение в котором есть целая функция, представляет собой целую функцию комплексного переменного  $z$ , которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся на всей плоскости. Чтобы получить этот ряд, достаточно разложить подынтегральную функцию по степеням  $t$  и проинтегрировать почленно. Мы находим тогда

$$\int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k! k}, \quad |z| < \infty,$$

откуда следует, что искомое разложение интегральной показательной функции будет

$$\text{Ei}(z) = \gamma + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k! k}, \quad |\arg(-z)| < \pi. \quad (3.1.5)$$

Разложение справедливо во всякой точке плоскости, разрезанной вдоль положительной вещественной полуоси.

Из формулы (3.1.5) вытекает, что значения функции  $\text{Ei}(z)$  на верхнем и нижнем берегах разреза будут соответственно

$$\text{Ei}(x \pm i0) = \text{Ei}_1(x) \mp \pi i, \quad x > 0,$$

где  $\text{Ei}_1(x)$  — вещественная функция, определяемая равенством

$$\text{Ei}_1(x) = \frac{1}{2} [\text{Ei}(x + i0) + \text{Ei}(x - i0)] = \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k! k}, \quad x > 0. \quad (3.1.6)$$

$\text{Ei}_1(x)$  называется модифицированной интегральной показательной функцией\*).

Интегральная показательная функция часто встречается в приложениях, например в теории излучения радиоволн антенной и в других задачах физики и техники. Многие интегралы более сложного вида могут быть выражены через интегральную показательную функцию. Так, например, интеграл

$$\int e^z f(z) dz,$$

где  $f(z)$  — произвольная рациональная функция, представляется в конечном виде через функцию  $\text{Ei}(z)$  и элементарные функции\*\*).

\*) Иногда для этой функции сохраняется обозначение  $\text{Ei}(x)$ , т. е. принимается, что  $\text{Ei}(x) \equiv \text{Ei}_1(x)$ ,  $x > 0$ .

\*\*) См. упражнения, пример 9.

### § 3.2. Асимптотическое представление интегральной показательной функции для $|z| \rightarrow \infty$

Для того чтобы получить асимптотическое представление  $Ei(z)$ , пригодное для аппроксимации этой функции при больших по модулю  $z$ , воспользуемся формулой (3.1.1) и преобразуем ее с помощью многократного интегрирования по частям.

Мы имеем тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt &= \frac{e^z}{z} + \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^z}{z} + \frac{1 \cdot e^z}{z^2} + 1 \cdot 2 \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^3} dt = \\ &= e^z \left[ \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1 \cdot 2}{z^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots n}{z^{n+1}} \right] + 1 \cdot 2 \dots (n+1) \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^{n+2}} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$Ei(z) = \frac{e^z}{z} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{k!}{z^k} + r_n(z) \right], \quad (3.2.1)$$

где

$$r_n(z) = (n+1)! z e^{-z} \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^{n+2}} dt, \quad |\arg(-z)| < \pi. \quad (3.2.2)$$

Для оценки величины остаточного члена  $r_n(z)$  заметим, что интегрирование по первоначально избранному пути может быть заменено, в силу теоремы Коши, интегрированием по прямой, параллельной вещественной оси, проходящей через точку  $t = z$ .

Предположим, что  $|\arg(-z)| \leq \pi - \delta$  ( $\delta$  — произвольно малое положительное число) и положим  $z = x + iy$ . Тогда на пути интегрирования  $t = \sigma + iy$  ( $-\infty < \sigma \leq x$ ) и  $|e^{t-z}| = e^{\sigma-x}$ ,  $|t| \geq |z| \sin \delta$ , поэтому

$$|r_n(z)| \leq \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1} (\sin \delta)^{n+2}} \int_{-\infty}^x e^{\sigma-x} d\sigma = \frac{(n+1)!}{(\sin \delta)^{n+2}} |z|^{-n-1} = O(|z|^{-n-1}). \quad (3.2.3)$$

Полученная оценка показывает, что интегральная показательная функция для больших значений  $|z|$  допускает асимптотическое представление:

$$Ei(z) = \frac{e^z}{z} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{k!}{z^k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \quad |\arg(-z)| \leq \pi - \delta. \quad (3.2.)$$

Из (3.2.4) следует, что расходящийся ряд

$$\frac{e^z}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{z^k}$$

является асимптотическим для функции  $Ei(z)$  в секторе  $|\arg(-z)| \leq \leq \pi - \delta$ .

Заметим в заключение, что если  $|\arg(-z)| \leq \frac{\pi}{2}$  (т. е. при  $R(z) \leq 0$ ), для модуля  $r_n(z)$  получается более точная оценка

$$|r_n(z)| \leq \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}}. \quad (3.2.5)$$

Ошибка, допускаемая при аппроксимации функции  $Ei(z)$  суммой конечного числа членов рассматриваемого ряда, в этом случае не превосходит по модулю величины первого отброшенного члена.

### § 3.3. Интегральная показательная функция с мнимым аргументом. Интегральные синус и косинус

Если аргумент интегральной функции  $Ei(z)$  есть мнимое число  $z = xi$  ( $x > 0$ ), рассматриваемая функция может быть выражена через две вещественные функции  $Si(x)$  и  $Ci(x)$ , известные в литературе под названием интегрального синуса и интегрального косинуса.

Эти функции, имеющие также большое самостоятельное значение, в общем случае комплексного аргумента определяются при помощи формул:

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt; \quad Ci(z) = \int_{\infty}^z \frac{\cos t}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi, \quad (3.3.1)$$

где в первом интеграле выбор пути интегрирования является вполне произвольным, во втором — ограничен требованием, чтобы кривая  $L$ , вдоль которой производится интегрирование, принадлежала плоскости, разрезанной вдоль отрицательной вещественной полуоси (рис. 6).

Согласно общей теореме\*),  $Si(z)$  — целая функция  $z$ ,  $Ci(z)$  — функция, регулярная в плоскости с разрезом вдоль полуоси  $(-\infty, 0)$ .

\*) См. сноску на стр. 24.

При вещественном  $z = x > 0$  обе функции вещественны и имеют колебательный характер\*).

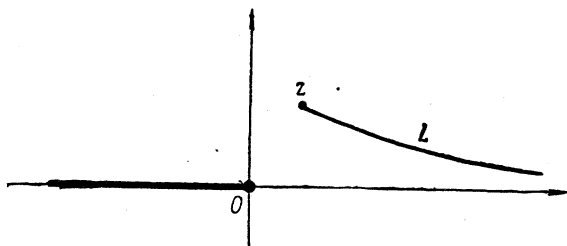


Рис. 6.

Предельные значения рассматриваемых функций при больших и малых значениях аргумента даются формулами:

$$\begin{aligned} \text{Si}(\infty) &= \frac{\pi}{2}; & \text{Ci}(\infty) &= 0, \\ \text{Si}(0) &= 0; & \text{Ci}(+0) &= -\infty. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Графики функций  $\text{Si}(x)$  и  $\text{Ci}(x)$  изображены на рис. 7.

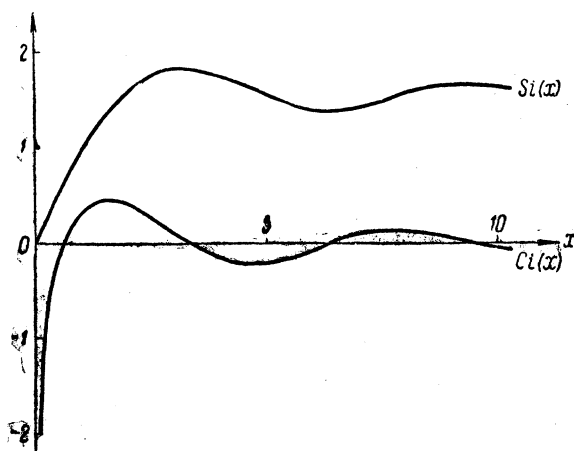


Рис. 7.

Для того чтобы установить связь между функциями  $\text{Ei}(xi)$ ,  $\text{Si}(x)$  и  $\text{Ci}(x)$ , положим в формуле (3.1.1)  $z = xi$  ( $x > 0$ ) и покажем, что

\*) При  $x < 0$   $\text{Si}(x) = -\text{Si}(|x|)$ , функция  $\text{Ci}(x)$  не определена. Колебательный характер следует из формул:

$$\frac{d}{dx} \text{Si}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{d}{dx} \text{Ci}(x) = \frac{\cos x}{x},$$

показывающих, что  $\text{Si}(x)$  достигает экстремума в точках  $x = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\text{Ci}(x)$  — в точках  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

интегрирование по первоначально избранному пути  $L$  может быть заменено интегрированием вдоль мнимой оси. Для доказательства рассмотрим интеграл от функции  $\frac{e^t}{t}$ , взятый по замкнутому контуру, состоящему из дуги  $C_R$  круга радиуса  $R$ , описанного из начала коор-

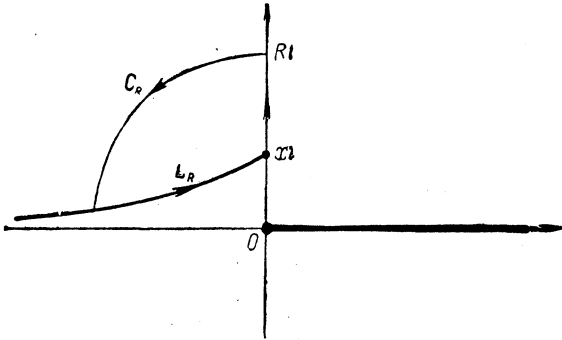


Рис. 8.

динат, отрезка  $L_R$  кривой  $L$  (рис. 8), находящегося внутри этого круга, и отрезка  $(x, R)$  мнимой оси. По теореме Коши имеем

$$\int_{L_R} + \int_{xi}^{Ri} + \int_{C_R} = 0.$$

При переходе к пределу при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по  $L_R$  стремится к  $Ei(xi)$ , а интеграл по  $C_R$  исчезает\*), поэтому

$$Ei(xi) = - \int_{xi}^{i\infty} \frac{e^t}{t} dt = \int_{\infty}^x \frac{e^{iu}}{u} du = \int_{\infty}^x \frac{\cos u}{u} du + i \int_{\infty}^x \frac{\sin u}{u} du,$$

\*) На дуге  $C_R$   $t = Re^{i\theta}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ , поэтому, принимая во внимание известное неравенство  $\sin \psi \geq \frac{2}{\pi} \psi$ , справедливое при  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ , имеем:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^t}{t} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{R \cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \psi} d\psi \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} \psi} d\psi = \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{-R}}{R},$$

откуда вытекает, что  $\int_{C_R} \rightarrow 0$ , когда  $R \rightarrow \infty$ .

откуда следует искомое соотношение:

$$\operatorname{Ei}(xt) = \operatorname{Ci}(x) - i \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) \right], \quad x > 0. \quad (3.3.3)$$

Аналогичным образом получаем

$$\operatorname{Ei}(-xt) = \operatorname{Ci}(x) + i \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) \right], \quad x > 0. \quad (3.3.4)$$

Формулы (3.3.3) — (3.3.4) доказаны для  $x > 0$ , однако с помощью принципа аналитического продолжения легко показать, что рассматриваемые соотношения справедливы в более широкой области, именно \*)

$$\begin{aligned} \operatorname{Ei}\left(-ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right) &= \operatorname{Ci}(z) - i \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(z) \right], & -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi; \\ \operatorname{Ei}\left(-ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) &= \operatorname{Ci}(z) + i \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(z) \right], & -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Из (3.3.5) вытекают полезные равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ci}(z) &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Ei}\left(-ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) + \operatorname{Ei}\left(-ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right) \right], \\ \operatorname{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i} \left[ \operatorname{Ei}\left(-ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) - \operatorname{Ei}\left(-ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right) \right], \\ &|\arg z| < \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

дающие представления функций  $\operatorname{Ci}(z)$  и  $\operatorname{Si}(z)$  через интегральную показательную функцию.

Функции  $\operatorname{Si}(z)$  и  $\operatorname{Ci}(z)$  могут быть представлены рядами простого вида. Разложение  $\operatorname{Si}(z)$  получается путем подстановки в (3.3.1) степенного ряда для  $\sin t$  и почленного интегрирования. Мы имеем:

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}, \quad |z| < \infty. \quad (3.3.7)$$

Вывод соответствующего разложения для  $\operatorname{Ci}(z)$  требует несколько более сложных рассуждений.

\*) Действительно, обе стороны равенств (3.3.5) представляют регулярные функции  $z$  в указанных секторах, совпадающие при  $z = x > 0$ .

Проще всего воспользоваться соотношением между функциями  $\text{Ci}(z)$  и  $\text{Ei}\left(-ze^{\pm \frac{\pi i}{2}}\right)$  и равенством (3.1.5). Мы получим тогда \*

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k! 2k}, \quad |\arg z| < \pi. \quad (3.3.8)$$

Из формулы (3.3.8) в частности вытекает, что значения функции  $\text{Ci}(z)$  на верхнем и нижнем берегах разреза  $(-\infty, 0)$  даются соответственно равенствами:

$$\text{Ci}(-x \pm i0) = \text{Ci}(x) \pm \pi i, \quad x > 0. \quad (3.3.9)$$

Асимптотические представления функций  $\text{Ci}(z)$  и  $\frac{\pi}{2} - \text{Si}(z)$  для больших  $|z|$  и  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$  могут быть выведены из формул (3.2.4) и (3.3.6). Мы находим

$$\begin{aligned} \text{Ci}(z) &= \frac{\sin z}{z} P(z) - \frac{\cos z}{z} Q(z), \\ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(z) &= \frac{\cos z}{z} P(z) + \frac{\sin z}{z} Q(z), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

где

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{z^{2k}} + O(|z|^{-2n-2}), \\ Q(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k+1)!}{z^{2k+1}} + O(|z|^{-2n-3}). \end{aligned}$$

### § 3.4. Интегральный логарифм

С интегральной показательной функцией тесно связана другая специальная функция, играющая важную роль в анализе и известная под названием интегрального логарифма  $\text{li}(z)$ . Эта функция определяется при помощи равенства

$$\text{li}(z) = \int_0^z \frac{dt}{\ln t}, \quad |\arg z| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi, \quad (3.4.1)$$

---

\*) Первоначальное ограничение  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$  легко устраняется с помощью принципа аналитического продолжения.

где интеграл берется вдоль произвольного пути  $L$ , принадлежащего плоскости с разрезами по вещественной оси  $(-\infty, 0)$  и  $(1, \infty)$  (рис. 9).

На основании общей теоремы \*) интегральный логарифм представляет собой регулярную функцию в рассматриваемой разрезанной плоскости. Если ввести новое переменное интегрирования  $u = \ln t$ , легко выразить  $\text{li}(z)$  через интегральную показательную функцию.

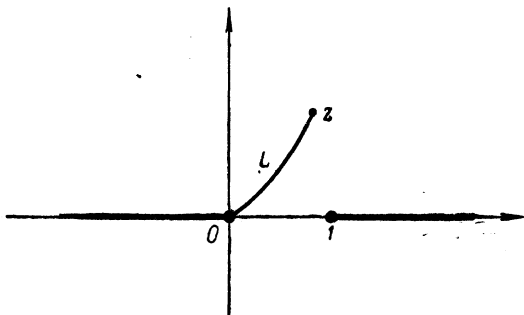


Рис. 9.

Действительно, исходная область  $t$  преобразуется на плоскости  $u$  в полосу  $|I(u)| < \pi$  с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси и интеграл (3.4.1) переходит в интеграл

$$\text{li}(z) = \int_{-\infty}^{\ln z} \frac{e^u}{u} du, \quad (3.4.2)$$

взятый по произвольному пути, принадлежащему этой области. Последняя составляет часть области, в которой определена интегральная показательная функция (§ 3.1), поэтому, согласно данному выше определению этой функции, находим

$$\text{li}(z) = \text{Ei}(\ln z), \quad (3.4.3)$$

где логарифм имеет свое главное значение.

Пользуясь соотношением (3.4.3), легко вывести свойства интегрального логарифма из соответствующих свойств интегральной показательной функции. Так, например, из формулы (3.1.5) следует формула

$$\text{li}(z) = \gamma + \ln(-\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln z)^k}{k! k}, \quad (3.4.4)$$

\*) См. сноску на стр. 24.



где  $z$  принадлежит плоскости с разрезами  $(-\infty, 0)$  и  $(1, \infty)$ , и логарифм всякий раз обозначает главное значение этой функции.

Из (3.4.4) вытекает в частности, что значения  $\text{li}(z)$  на верхнем и нижнем берегах разреза  $(1, \infty)$  будут

$$\text{li}(x \pm i0) = \text{li}_1(x) \mp \pi i, \quad x > 1, \quad (3.4.5)$$

где через  $\text{li}_1(x)$  обозначена вещественная функция:

$$\begin{aligned} \text{li}_1(x) &= \frac{1}{2} [\text{li}(x + i0) + \text{li}(x - i0)] = \\ &= \gamma + \ln \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k! k}, \quad x > 1. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Функция  $\text{li}_1(x)$  называется модифицированным интегральным логарифмом\*). Из (3.1.6) следует, что эта функция связана с соответствующей модифицированной интегральной показательной функцией  $\text{Ei}_1(x)$  соотношением

$$\text{li}_1(x) = \text{Ei}_1(\ln x). \quad (3.4.7)$$

Функция  $\text{li}_1(x)$  часто встречается в анализе, в частности играет важную роль в теории чисел\*\*).

В заключение укажем на вытекающее из (3.2.1) асимптотическое представление

$$\text{li}(z) = \frac{z}{\ln z} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln z)^k} + r_n(z) \right], \quad |\arg z| \leq \pi - \delta, \quad (3.4.8)$$

где  $|r_n(z)| = O(|\ln z|^{-n-1})$  для больших значений  $|\ln z|$ .

В частности, при  $|z| < 1$

$$|r_n(z)| \leq \frac{(n+1)!}{|\ln z|^{n+1}}.$$

### § 3.5. Приложение к радиотехнике. Излучение линейного полуволнового вибратора

В качестве простого примера приложения специальных функций, изученных в настоящей главе, рассмотрим задачу об излучении одиночного линейного вибратора (см. рис. 10) длины  $2l = \frac{\lambda}{2}$  ( $\lambda$  — длина

\*) Иногда сохраняют для этой функции название и обозначение интегрального логарифма, используя то обстоятельство, что для  $z = x > 1$  рассматриваемая функция не определена равенством (3.4.1).

\*\*\*) См. например, Инггам [1].

волны), по которому течет переменный ток частоты  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , распределенный вдоль провода по закону

$$I = I_0 \cos \frac{\pi \zeta}{2l} \cos \omega t, \quad -l \leq \zeta \leq l. \quad (3.5.1)$$

Если обозначить через  $\mathbf{E}^{(t)}$  и  $\mathbf{H}^{(t)}$  векторы электрического и магнитного полей,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — их комплексные амплитуды, связанные с первыми соотношениями

$$\mathbf{E}^{(t)} = R(\mathbf{E}e^{i\omega t}), \quad \mathbf{H}^{(t)} = R(\mathbf{H}e^{i\omega t}), \quad (3.5.2)$$

то средняя мощность энергии, излучаемой вибратором за период, определяется формулой

$$P = R \left\{ \frac{c}{8\pi} \int_{(S)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n ds \right\}, \quad (3.5.3)$$

где  $(S)$  — произвольная поверхность, охватывающая вибратор,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности,  $\mathbf{H}^*$  — сопряженное значение вектора  $\mathbf{H}$  \*).

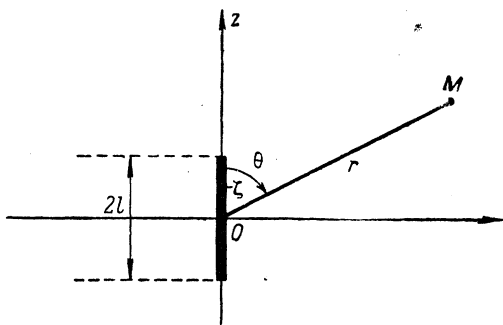


Рис. 10.

В рассматриваемом случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  компоненты  $(E_r, E_\theta, 0)$  и  $(0, 0, H)$ , и в качестве поверхности  $(S)$  удобно выбрать сферу  $r = \rho$  произвольно большого радиуса  $\rho$ .

\*) См., например, Стрэттон [1].

Заметим, что сопряженным значением комплексного вектора  $\mathbf{H}$ , составляющие которого суть комплексные числа  $(H_x, H_y, H_z)$ , называется вектор  $\mathbf{H}^*$  с составляющими  $(H_x^*, H_y^*, H_z^*)$ , представляющими собой комплексно сопряженные числа  $H_x^* = \bar{H}_x, H_y^* = \bar{H}_y, H_z^* = \bar{H}_z$ .

Формула (3.5.3) принимает тогда вид

$$P = R \left\{ \frac{c\rho^2}{4} \int_0^\pi E_\theta H^* \sin \theta d\theta \right\}, \quad (3.5.4)$$

где под знаком интеграла можно заменить точные значения  $E_\theta$  и  $H$  их асимптотическими выражениями.

Воспользовавшись известными формулами для составляющих электромагнитного поля элементарного диполя и интегрируя по  $\zeta$ , мы легко получаем, что при достаточно большом  $\rho$

$$H \approx E_\theta \approx \frac{I_0 i k}{c\rho} e^{-ik\rho} \sin \theta \int_{-l}^l \cos \frac{\pi \zeta}{2l} e^{ik\zeta \cos \theta} d\zeta = \frac{2I_0 i}{c\rho} e^{-ik\rho} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta},$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ , откуда следует

$$P = \frac{I_0^2}{c} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta. \quad (3.5.5)$$

Последний интеграл может быть выражен через интегральный косинус  $\text{Ci}(x)$  (§ 3.3).

Вводя новое переменное интегрирования  $x = \cos \theta$ , имеем:

$$\begin{aligned} P &= \frac{I_0^2}{c} \int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x^2} dx = \frac{I_0^2}{2c} \left[ \int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x} dx + \right. \\ &+ \left. \int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{1 + x} dx \right] = \frac{I_0^2}{2c} \left[ \int_0^1 \frac{1 - \cos \pi y}{y} dy + \int_1^2 \frac{1 - \cos \pi y}{y} dy \right] = \\ &= \frac{I_0^2}{2c} \int_0^2 \frac{1 - \cos \pi y}{y} dy = \frac{I_0^2}{2c} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos z}{z} dz. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Если воспользоваться теперь формулой примера 3, стр. 61, получаем окончательно:

$$P = \frac{I_0^2}{2c} [\gamma + \ln 2\pi - \text{Ci}(2\pi)], \quad (3.5.7)$$

где  $\text{Ci}(x)$  — интегральный косинус,  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

Метод расчета излучения, изложенный в настоящем параграфе, может быть применен к антеннам более сложной конфигурации, причем замечательным является то обстоятельство, что и в этих случаях искомый результат выражается через интегральные функции.

### § 3.6. Сведения о таблицах интегральной показательной функции и других родственных ей функций

Для функций, рассмотренных в настоящей главе, существует ряд подробных таблиц, из которых мы укажем на следующие:

1. Таблицы интегральной показательной функции, Изд. АН СССР, 1954:

$$Ei(x), \quad -Ei(-x), \\ x = 0(0,0001) 1,3(0,001) 3(0,0005) 10(0,1) 15, \quad 7 \text{ зн. ц.}$$

2. Таблицы интегрального синуса и косинуса, Изд. АН СССР, 1954:

$$Si(x), \quad Ci(x), \\ x = 0(0,0001) 2(0,001) 10(0,005) 100, \quad 7 \text{ дес. зн.}$$

3. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$\left. \begin{aligned} -Ei(-x), \quad x = 0(0,01) 1(0,1) 5(1) 15, \\ Ei_1(x), \quad x = 0(0,01) 1(0,1) 5(1) 15, \\ Si(x), \quad Ci(x), \quad x = 0(0,01) 1(0,1) 5(1) 15(5) 100(10) 200(100) 10^3 \end{aligned} \right\} \\ 4-6 \text{ зн. ц.}$$

4. Tables of Sine, Cosine and Exponential Integrals, National Bureau of Standards, vol. I—II, 1940:

$$\left. \begin{aligned} -Ei(-x), \quad Ei(x), \quad x = 0(0,0001) 2(0,001) 10(0,1) 15, \\ Si(x), \quad Ci(x), \quad x = 0(0,0001) 2(0,001) 10(0,1) 20(0,2) 40 \end{aligned} \right\} \\ 9-10 \text{ дес. зн.}$$

5. Карпов К. А. и Разумовский С. Н., Таблицы интегрального логарифма, Изд. АН СССР, 1956:

$$li(x), \\ x = 0(0,0001) 2,5(0,001) 20(0,01) 200(0,1) 500(1) 10\,000(10) 25\,000 \\ 7 \text{ зн. ц.}$$

При  $x > 1$  под  $li(x)$  понимается главное значение интеграла, равное  $li_1(x)$ .

Данные о других таблицах приведены в справочниках, указанных на стр. 27.

**Упражнения**

1. Получить интегральное представление

$$-Ei(-z) = e^{-z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{1+t} dt, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. Получить интегральное представление для квадрата интегральной показательной функции

$$[Ei(-z)]^2 = 2e^{-2z} \int_0^{\infty} e^{-2zt} \frac{\ln(1+2t)}{1+t} dt, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Указание. Представить левую сторону в виде двойного интеграла по области ( $0 \leq s \leq \infty$ ,  $0 \leq t \leq s$ ) и ввести новые переменные  $\alpha = s + t$ ,  $\beta = st$ .

3. Получить интегральное представление

$$Ci(z) = \gamma + \ln z - \int_0^z \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi.$$

4. Исходя из (3.1.1) и определения модифицированной интегральной показательной функции  $Ei_1(x)$ , показать, что

$$Ei_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^t}{t} dt \right), \quad x > 0,$$

т. е. что  $Ei_1(x)$  есть главное значение интеграла  $\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ .

5. Получить интегральное представление

$$Ei_1(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Указание. Разложить интеграл в ряд по степеням  $x$  и воспользоваться (3.1.6).

6. Применяя правило Лопиталя, показать последовательно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} Ei_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} Ei_1(x) = 1$$

и получить отсюда асимптотическую формулу

$$Ei_1(x) \approx \frac{e^x}{x}.$$

7. Воспользовавшись результатом примера 6 и соотношением (3.4.7), вывести асимптотическую формулу

$$li_1(x) \approx \frac{x}{\ln x},$$

играющую важную роль в теории чисел.

8. Получить формулу

$$H_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right), \quad x > 1.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться соотношением (3.4.7) и результатом примера 4.

9. Интеграл  $\int f(x) e^x dx$ , где  $f(x)$  — произвольная рациональная функция и путь интегрирования не проходит через особые точки, приводится через выделение целой части  $f(x)$  и разложение остатка на простейшие дроби к интегралам вида:

$$(I) \int x^n e^x dx, \quad (II) \int \frac{e^x}{(x-a)^n} dx,$$

где  $n$  — целое положительное число.

При помощи интегрирования по частям интеграл типа (I) может быть выражен через элементарные функции, а интеграл (II) — приведен к интегралу

$\int \frac{e^x}{x-a} dx$ , который подстановкой  $u = x - a$  сводится к интегральной показательной функции (вообще говоря, от комплексного аргумента).

Применяя описанный метод, показать, что при  $x < 0$

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t^2(t-1)} dt = \frac{e^x}{x} - 2\text{Ei}(x) + e\text{Ei}(x-1).$$

10. Если  $\bar{f}$  — преобразование Лапласа от функции  $f$  (стр. 45, пример 4), то доказать, что

$$\overline{\text{Si}(x)} = \frac{1}{p} \text{arc tg } \frac{1}{p}, \quad -\overline{\text{Ei}(-x)} = \frac{1}{p} \ln(1+p),$$

где арктангенс и логарифм имеют свои главные значения.

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ III

Нильсен [1]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], т. 2; Лёш и Шоблик [1].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

## ГЛАВА IV

### ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

#### § 4.1. Общие замечания об ортогональных полиномах

Система функций  $f_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) называется ортогональной в промежутке  $(a, b)$  с весом  $p(x)$ , если при всяком  $m \neq n$  имеет место равенство

$$\int_a^b p(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0, \quad (4.1.1)$$

где  $p(x)$  — некоторая фиксированная неотрицательная функция, не зависящая от индексов  $m$  и  $n$ .

Простейшим примером ортогональной системы является система тригонометрических функций  $f_n(x) = \cos nx$ , которая ортогональна в промежутке  $(0, \pi)$  с весом  $p(x) = 1$ , ибо при  $m \neq n$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0.$$

Ортогональные системы функций играют большую роль в анализе, главным образом в связи с возможностью разложения произвольных функций, принадлежащих к весьма широким функциональным классам, в ряды по ортогональным функциям, примерами которых могут служить ряды Фурье, ряды Фурье — Бесселя и т. д.

Важный класс ортогональных систем функций составляют ортогональные полиномы  $f_n(x) = p_n(x)$  ( $n$  — степень полинома), к которым относятся такие часто встречающиеся в приложениях специальные функции, как полиномы Лежандра, Эрмита, Лагерра, Чебышева, Якоби и др. Перечисленные ортогональные полиномы обладают, наряду со свойствами ортогональности (4.1.1), рядом других общих свойств; например, они являются интегралами дифференциальных уравнений простого вида и могут быть определены как коэффициенты разложения по степеням  $t$  некоторой соответственно выбранной функции  $\omega(x, t)$ , которая называется производящей функцией.

Ортогональные полиномы играют важную роль в математической физике, в теории аппроксимации функций, в теории механических квадратур и т. д.

Теории ортогональных полиномов посвящено очень большое число работ, среди которых видное место занимают исследования выдающихся русских математиков П. Л. Чебышева, Н. И. Сони́на, В. А. Стеклова, А. А. Адамова, И. В. Успенского, С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера и др.

В настоящей главе рассматривается теория полиномов Лежандра, Эрмита и Лагерра, имеющих наиболее многочисленные приложения в физике и технике. Краткие сведения о других типах ортогональных полиномов даны в упражнениях к данной главе (примеры 21—22). Для удобства читателя, интересующегося преимущественно прикладной стороной вопроса, изложение свойств каждого класса полиномов дано независимо одно от другого. Лиц, интересующихся изучением теории ортогональных полиномов с более общей точки зрения, мы отсылаем к монографиям Лаврентьева М. А. и Шабата Б. В. [1], Джексона [1], Сега [1], Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера, Трикоми [1].

## § 4.2. Полиномы Лежандра.

### Определение и производящая функция

Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  для любых вещественных или комплексных значений переменного  $x$  определяются при помощи формулы

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.1)$$

откуда непосредственно следует:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \text{ и т. д.}$$

Общее выражение для полинома Лежандра  $n$ -го порядка получается из (4.2.1), если воспользоваться формулой бинома

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

что дает

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (4.2.2)$$

где  $[v]$  обозначает целую часть числа  $v$ .



Ниже (§ 4.5) будет показано, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему функций на промежутке  $(-1, 1)$  с весом  $p(x) = 1$  \*).

Свойства полиномов Лежандра могут быть выведены весьма простым способом, если предварительно доказать, что функция

$$\omega(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где значение корня при  $t = 0$  выбрано равным единице, является производящей функцией для этих полиномов, т. е. для достаточно малых  $|t|$  имеет место разложение

$$\omega(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (4.2.3)$$

Так как  $\omega(x, t)$ , рассматриваемая как функция  $t$ , регулярна в круге  $|t| < r$ , радиус  $r$  которого равен меньшему из модулей корней квадратного уравнения  $1 - 2tx + t^2 = 0$  \*\*, то из общей теории следует, что существует разложение вида

$$\omega(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) t^n, \quad |t| < r,$$

с коэффициентами  $c_n(x)$ , которые могут быть выражены через контурные интегралы

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} t^{-n-1} dt, \quad (4.2.4)$$

взятые по произвольному замкнутому контуру  $C$ , охватывающему точку  $t = 0$  и принадлежащему области регулярности  $\omega(x, t)$ ,

При помощи подстановки  $(1 - 2tx + t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - tu$  рассматриваемые интегралы преобразуются в интегралы от рациональных функций

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n (u - x)^{n+1}} du, \quad (4.2.5)$$

\*) Это свойство можно установить также, исходя непосредственно из определения (4.2.1). Заметим еще, что если  $p_n(x)$  — произвольная система полиномов, ортогональных на промежутке  $(-1, 1)$  с весом  $p(x) = 1$ , то  $p_n(x) = \gamma_n P_n(x)$ , где  $\gamma_n$  не зависит от  $x$ .

\*\*) В наиболее важном для приложений случае, когда  $x$  есть вещественное число, принадлежащее промежутку  $(-1, 1)$ ,  $r = 1$ .

по замкнутому контуру  $C'$ , окружающему точку  $u = x^*$ ), и могут быть вычислены с помощью теории вычетов. Применяя хорошо известные правила, находим

$$c_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[ \frac{d^n (u^2 - 1)^n}{du^n} \right]_{u=x} \equiv P_n(x),$$

что и доказывает справедливость утверждения, высказанного выше.

В качестве простого примера приложения производящей функции к выводу свойств полиномов Лежандра укажем на получение равенств

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n; \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}, \\ P_{2n+1}(0) = 0, \quad (4.2.6)$$

непосредственно вытекающих из (4.2.3), если положить там  $x$  равным  $\pm 1$  или 0 и затем разложить левую часть по степеням  $t$ .

Полиномы Лежандра, определенные выше, играют важную роль в различных приложениях, в частности в математической физике (гл. VIII, § 3, 4, 7, 8, 13, 14).

### § 4.3. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра

Другой пример использования разложения (4.2.3) представляет вывод рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра. Чтобы получить первое из этих соотношений, воспользуемся тождеством

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial t} + (t - x)w = 0$$

и подставим в него ряд (4.2.3). Принимая во внимание, что степенной ряд можно дифференцировать почленно, имеем

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0,$$

откуда, приравнявая нулю коэффициент при  $t^n$ , находим

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) = 0,$$

или

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.1)$$

\*) Точке  $t = 0$  соответствует точка  $u = x$  и замкнутому контуру  $C$  — замкнутый контур  $C'$ , так как после обхода вдоль  $C$  корень принимает свое прежнее значение.

Равенство (4.3.1) представляет собой рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Лежандра. Это равенство может быть использовано для последовательного вычисления рассматриваемых полиномов.

Аналогичным образом из тождества

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

получаем \*)

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} P_n(x) = 0,$$

откуда следует

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.2)$$

Дифференцируя (4.3.1) и исключая из полученного равенства и (4.3.2) один раз  $P'_{n-1}(x)$ , другой —  $P'_{n+1}(x)$ , находим два других рекуррентных соотношения \*\*):

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.3)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.4)$$

Складывая оба равенства, приходим к более симметричной формуле

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \quad (4.3.5)$$

Наконец, заменив в (4.3.3)  $n$  на  $n-1$  и исключив из найденного уравнения и (4.3.4)  $P'_{n-1}(x)$ , находим

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - n x P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.6)$$

\*) Для обоснования возможности почленного дифференцирования ряда (4.2.3) по переменной  $x$  достаточно убедиться в равномерной сходимости этого ряда в области  $|x| < a$  ( $a$  — любое конечное число), при достаточно малых  $|t|$ . Пусть  $|t| < b$ , где  $b = \sqrt{a^2 + 1} - a$ . Тогда, согласно § 4.2, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(ia)}{i^n} |t|^n \text{ сходится к } (1 - 2a|t| - |t|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Равномерная сходимость ряда (4.2.3) при  $|x| < a$ ,  $|t| < b$  следует теперь из неравенства

$$|P_n(x) t^n| \leq \frac{P_n(ia)}{i^n} |t|^n,$$

вытекающего из (4.2.2).

\*\*) Справедливость дальнейших соотношений для нескольких первых значений  $n$  в некоторых случаях не вытекает из общих рассуждений; однако прямой подстановкой  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , ... легко убедиться в том, что эти соотношения сохраняют силу и для таких значений  $n$ .

Последняя формула позволяет выразить производную от полинома Лежандра через эти полиномы. Если продифференцировать (4.3.6) по  $x$  и снова исключить  $P'_{n-1}(x)$  с помощью (4.3.4), получим

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.7)$$

Соотношение (4.3.7) показывает, что полином Лежандра  $u = P_n(x)$  является частным интегралом линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$[(1-x^2)u']' + n(n+1)u = 0. \quad (4.3.8)$$

Полученное уравнение встречается в математической физике и играет важную роль в теории полиномов Лежандра.

При помощи замены переменных легко получить ряд других уравнений, интегралы которых могут быть выражены через полиномы Лежандра. Так, например, уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + n(n+1)u = 0 \quad (4.3.9)$$

удовлетворяет функция  $u = P_n(\cos \theta)$ , уравнению

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right] u = 0 \quad (4.3.10)$$

— функция  $u = (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \theta)$  и т. д.

#### § 4.4. Интегральные представления для полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра допускают простые представления с помощью определенных интегралов, содержащих переменное  $x$  как параметр. Чтобы получить первое из этих представлений, предположим, что  $x$  — вещественное или комплексное число, и выберем в формуле (4.2.5) в качестве пути интегрирования круг радиуса  $|x^2 - 1|^{\frac{1}{2}}$  с центром в точке  $u = x^*$ . При этом  $u = x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$  ( $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ), и формула (4.2.3) принимает вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{x^2 + 2x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} + (x^2 - 1) e^{2i\varphi} - 1}{2(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}} \right\}^n d\varphi,$$

откуда

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right]^n d\varphi. \quad (4.4.1)$$

\*) По теореме Коши замена контура  $C'$  любым другим простым замкнутым контуром, окружающим точку  $u = x$ , не изменяет значения интеграла.

Формула (4.4.1) называется интегралом Лапласа. Выбор значения корня  $(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$  здесь произволен, так как после возведения в  $n$ -ю степень и почленного интегрирования нечетные степени корня выпадают.

Из (4.4.1) вытекает одно полезное неравенство для полиномов Лежандра. Пусть  $x$  — вещественное число, удовлетворяющее условию  $-1 \leq x \leq 1$ . Тогда  $|x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi| = [x^2 + (1 - x^2) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \leq 1$ , откуда

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4.4.2)$$

Другое важное интегральное представление для полиномов Лежандра может быть выведено из формулы (4.4.1), если предположить, что  $x$  — вещественно и заключено в пределах  $-1 < x < 1$ .

Полагая в этом случае  $x = \cos \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ), мы можем записать рассматриваемую формулу в виде

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi,$$

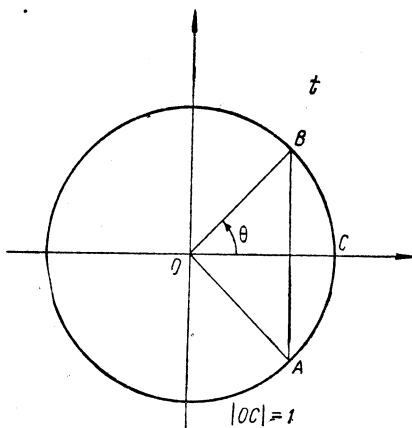


Рис. 11.

откуда, если ввести новое комплексное переменное интегрирования  $t = \cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi$ , следует:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}}, \quad (4.4.3)$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку  $AB$ , соединяющему точки  $t = e^{\pm i\theta}$  (рис. 11), и выбор ветви корня определяется из условия, что его значение в точке  $t = \cos \theta$  равно  $\sin \theta$ .

По теореме Коши интегрирование по  $AB$  можно заменить интегрированием по дуге  $ACB$  круга единичного радиуса, так как в области, заключенной между дугой и хордой, подынтегральная функция регулярна. Выполнив эту замену и полагая  $t = e^{i\psi}$ , находим

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\psi}}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi.$$

откуда, после отделения вещественной части, следует:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.4)$$

Формула (4.4.4) известна в литературе под названием интеграла Дирихле — Мелера и дает искомое интегральное представление для полиномов Лежандра.

### § 4.5. Ортогональность полиномов Лежандра

Одним из наиболее важных свойств полиномов Лежандра является их ортогональность на промежутке  $(-1, 1)$ , представляющая собой следствие дифференциального уравнения (4.3.7). Чтобы установить рассматриваемое свойство, умножим уравнение для  $m$ -го полинома на  $P_n(x)$ , уравнение для  $n$ -го полинома — на  $P_m(x)$  и вычтем одно из другого. Тогда получим

$$\begin{aligned} [(1-x^2)P'_m(x)]' P_n(x) - [(1-x^2)P'_n(x)]' P_m(x) + \\ + [m(m+1) - n(n+1)] P_m(x) P_n(x) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \{(1-x^2)[P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x)]\}' + \\ + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку  $(-1, 1)$  и замечая, что интеграл от первого слагаемого равен нулю, находим

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0,$$

откуда

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (4.5.1)$$

Формула (4.5.1) показывает, что полиномы Лежандра ортогональны в промежутке  $(-1, 1)$  с весом  $p(x) = 1$ . Свойство ортогональности (4.5.1) играет важную роль в теории разложения функций в ряды по полиномам Лежандра (§ 4.7). В этой теории необходимо также уметь находить значение интеграла (4.5.1) при  $m = n$ . Для этого заменим в рекуррентном соотношении (4.3.1)  $n$  на  $n-1$ , умножим полученное уравнение на  $(2n+1)P_n(x)$ , а уравнение (4.3.1) —

на  $(2n - 1)P_{n-1}(x)$  и вычтем из первого второе \*). Тогда получим

$$n(2n + 1)P_n^2(x) + (n - 1)(2n + 1)P_{n-2}(x)P_n(x) - \\ - (n + 1)(2n - 1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + \\ + n(2n - 1)P_{n-1}^2(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

откуда, интегрируя по промежутку  $(-1, 1)$  и принимая во внимание (4.5.1), находим

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n - 1}{2n + 1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Последовательное применение этой формулы дает

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{3}{2n + 1} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что полученный результат справедлив также при  $n = 0$  и  $n = 1$ . Таким образом,

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}. \quad (4.5.2)$$

Из формул (4.5.1—2) следует, что функции  $\varphi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  образуют ортонормированную систему функций на промежутке  $(-1, 1)$  \*\*).

### § 4.6. Асимптотическое представление полиномов Лежандра для больших значений индекса $n$

Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  ( $-1 < x < 1$ ) имеют простые асимптотические представления, удобные для рассмотрения поведения этих функций при  $n \rightarrow \infty$ . Для получения этих представлений может быть использован общий метод, принадлежащий В. А. Стеклову \*\*\*)

\*) На этот прием нам указал В. Л. Кан.

\*\*\*) Система функций  $\varphi_n(x)$  называется ортонормированной на промежутке  $(a, b)$ , если

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

\*\*\*) Стеклов В. А. [1].

Исходным пунктом для приложения этого метода к полиномам Лежандра является дифференциальное уравнение (4.3.10), которому удовлетворяет функция  $u = (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \theta)$ . Записав это уравнение в форме

$$u'' + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 u = -\frac{u}{4 \sin^2 \theta} \quad (4.6.1)$$

и принимая во внимание начальные условия  $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n(0)$ ,  $u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P_n'(0)$ , получаем, рассматривая правую часть уравнения (4.6.1) как известную функцию:

$$u(\theta) = P_n(0) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{P_n'(0)}{n + \frac{1}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{1}{4\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} u(\varphi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (4.6.2)$$

Уравнение (4.6.2) можно рассматривать как интегральное уравнение для функции  $u(\theta)$ . Если воспользоваться формулами (4.2.6; 4.3.6) и известными соотношениями теории гамма-функции (1.2.1, 4, 6), то получим:

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)}, \quad P_{2m+1}(0) = 0, \quad P_{2m}'(0) = 0, \\ P_{2m+1}'(0) = (-1)^m \frac{2\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)},$$

откуда следует, что уравнение (4.6.2) может быть записано в виде

$$u(\theta) = \alpha_n \left\{ \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] + r_n(\theta) \right\}, \quad (4.6.3)$$

где  $\alpha_n$  обозначает первое или второе из выражений:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)},$$

в зависимости от того, будет  $n$  четным или нечетным числом, и

$$r_n(\theta) = \frac{1}{4\alpha_n \left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} u(\varphi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (4.6.4)$$



Предположим теперь, что переменное  $\theta$  заключено в пределах  $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$ ;  $\delta$  — фиксированное положительное число. Обозначим через  $M_n$  максимум модуля  $u(\theta)$  в этом интервале. Тогда из (4.6.3) и (4.6.4) следует, что для всякого  $\theta$ , принадлежащего замкнутому интервалу  $(\delta, \pi - \delta)$ ,

$$|u(\theta)| \leq \alpha_n + \frac{\pi M_n}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta,$$

поэтому

$$M_n \leq \alpha_n + \frac{\pi M_n}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta.$$

Решая последнее неравенство относительно  $M_n$ , получаем

$$M_n \leq \alpha_n \left[ 1 - \frac{\pi}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta \right]^{-1}, \quad 2n+1 > \frac{\pi}{4} \operatorname{cosec}^2 \delta,$$

откуда следует оценка

$$|r_n(\theta)| \leq \frac{\pi \operatorname{cosec}^2 \delta}{4(2n+1)} \left[ 1 - \frac{\pi}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta \right]^{-1}, \quad 2n+1 > \frac{\pi}{4} \operatorname{cosec}^2 \delta.$$

Полученный результат показывает, что  $r_n(\theta) = O(n^{-1})$  равномерно во всем замкнутом интервале  $(\delta, \pi - \delta)$ . Далее из (4.6.3) вытекает асимптотическая формула

$$u(\theta) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \alpha_n \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.6.5)$$

для всех  $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$ .

Если воспользоваться формулой Стирлинга (1.4.24), то после простых вычислений находим

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \left( \frac{2}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

поэтому формула (4.6.5) может быть записана в более простом виде:

$$u(\theta) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \left( \frac{2}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.6.6)$$

Подставляя  $u(\theta)$ , получаем окончательную асимптотическую формулу для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos \theta) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \left( \frac{2}{\pi n \sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right], \quad \delta \leq \theta \leq \pi - \delta. \quad (4.6.7)$$

Более точные асимптотические представления даны в монографии Гобсона [1].

### § 4.7. Разложение функций в ряды по полиномам Лежандра

Во многих вопросах, связанных с различными приложениями полиномов Лежандра, возникает необходимость разложить заданную на интервале  $(-1, 1)$  функцию  $f(x)$  в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad -1 < x < 1. \quad (4.7.1)$$

Коэффициенты  $c_n$  этого разложения могут быть формально определены на основании свойства ортогональности полиномов Лежандра (§ 4.5). Действительно, умножая ряд (4.7.1) на  $P_m(x)$  и интегрируя по промежутку  $(-1, 1)$ , получаем, принимая во внимание равенства (4.5.1 -- 2),

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) P_m(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} c_m, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7.2)$$

Так как заранее неизвестно, допускает ли функция  $f(x)$  разложение в ряд вида (4.7.1) и законно ли почленное интегрирование этого ряда, выполненное в процессе определения коэффициентов  $c_n$ , нельзя без специального исследования утверждать, что полученный таким образом ряд сходится и имеет своей суммой  $f(x)$ .

Следующая теорема устанавливает простые достаточные условия такой сходимости.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  — произвольная вещественная функция, заданная на интервале  $(-1, 1)$  и удовлетворяющая условиям:

1°.  $f(x)$  есть кусочно-гладкая функция в открытом интервале  $(-1, 1)$ ;

2°. интеграл  $\int_{-1}^1 f^2(x) dx$  имеет конечное значение.

Тогда ряд (4.7.1) с коэффициентами  $c_n$ , вычисленными по формуле (4.7.2), сходится к  $f(x)$  во всякой внутренней точке интервала  $(-1, 1)$ , являющейся точкой непрерывности этой функции.

Для доказательства теоремы заметим прежде всего, что из условий, наложенных на  $f(x)$ , следует, что интегралы, стоящие в правой части (4.7.2), существуют, поэтому коэффициенты  $c_n$  действительно могут быть вычислены. В самом деле, подынтегральное выражение является интегрируемой функцией на открытом интервале  $(-1, 1)$  и в силу очевидного неравенства рассматриваемый интеграл мажорируется интегралом  $\int_{-1}^1 \frac{1}{2} [f^2(x) + P_n^2(x)] dx$ , который сходится

в силу 2°.

Обозначим через  $S_m(x)$  сумму  $m+1$  первых членов ряда (4.7.1). Подставляя значения коэффициентов  $c_n$ , имеем:

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \sum_{n=0}^m c_n P_n(x) = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^1 f(y) P_n(y) dy = \\ &= \int_{-1}^1 f(y) K_m(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

где

$$K_m(x, y) = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(y). \quad (4.7.4)$$

Значение последней суммы может быть найдено путем следующего приема: умножим рекуррентное соотношение (4.3.1) на  $P_n(y)$  и вычтем из полученного уравнения такое же уравнение с переставленными значениями  $x$  и  $y$ . Мы получим тогда

$$\begin{aligned} (n+1)[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)] - \\ - n[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)] = (2n+1)(x-y)P_n(x)P_n(y). \end{aligned}$$

Суммируя по  $n$  от единицы до  $m$  и замечая, что  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , находим

$$\begin{aligned} (x-y) \sum_{n=1}^m (2n+1) P_n(x) P_n(y) = \\ = (m+1)[P_{m+1}(x)P_m(y) - P_{m+1}(y)P_m(x)] - (x-y), \end{aligned}$$

откуда

$$K_m(x, y) = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{P_{m+1}(x)P_m(y) - P_{m+1}(y)P_m(x)}{x-y}. \quad (4.7.5)$$

Если проинтегрировать равенство (4.7.4) по  $y$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ , то из (4.5.1—2) следует\*), что

$$\int_{-1}^1 K_m(x, y) dy = 1. \quad (4.7.6)$$

Предположим теперь, что  $x$  есть внутренняя точка интервала  $(-1, 1)$ , в которой  $f(x)$  непрерывна, умножим равенство (4.7.6) на  $f(x)$  и вычтем из (4.7.3). Тогда получим

$$\begin{aligned} S_m(x) - f(x) &= \int_{-1}^1 K_m(x, y) [f(y) - f(x)] dy = \\ &= \frac{m+1}{2} P_m(x) \int_{-1}^1 P_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy - \\ &\quad - \frac{m+1}{2} P_{m+1}(x) \int_{-1}^1 P_m(y) \varphi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

где положено

$$\varphi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $\varphi(x)$  — произвольная вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

1°.  $\varphi(x)$  — кусочно-непрерывная функция в открытом интервале  $(-1, 1)$ ;

2°. интеграл  $\int_{-1}^1 \varphi^2(x) dx$  имеет конечное значение. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \varphi(x) P_n(x) dx = 0. \quad (4.7.8)$$

Для доказательства леммы представим рассматриваемый интеграл в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \dots &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-1}^{-1+\delta} \dots + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \dots + \int_{1-\delta}^1 \dots \right] = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

---

\*) Так как  $P_0(y) = 1$ , то  $\int_{-1}^1 P_n(y) dy = \begin{cases} 0, & n = 1, 2, \dots, \\ 2, & n = 0; \end{cases}$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца \*) и воспользовавшись (4.5.2), получаем

$$|J_3| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{1-\delta}^1 P_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{1-\delta}^1 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{1-\delta}^1 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{1-\delta}^1 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

и аналогично

$$|J_1| \leq \left\{ \int_{-1}^{-1+\delta} \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из этих оценок и условия 2° леммы следует, что можно выбрать такое не зависящее от  $n$  значение  $\delta$ , что будут выполнены неравенства

$$|J_1| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad |J_3| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad (4.7.10)$$

где  $\varepsilon$  — наперед заданное положительное число.

Считая, что  $\delta$  фиксировано таким образом, и воспользовавшись формулой (4.6.3), имеем

$$J_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = \\ = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_n \left[ 2^{-\frac{1}{2}} \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta d\theta + \right. \\ \left. + 2^{-\frac{1}{2}} \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} r_n(\theta) d\theta \right],$$

где положено  $\delta_1 = \arccos(1 - \delta)$ .

\*)  $\left\{ \int_a^b f(x) g(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$

См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], н° 447.

Так как, согласно условию 1° леммы,  $\varphi(\cos \theta)(\sin \theta)^{\frac{1}{2}}$  — кусочно-непрерывная функция, первые два интеграла стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  \*); последний интеграл также стремится к нулю, ибо  $r_n(\theta) = O(n^{-1})$  равномерно во всем промежутке  $(\delta_1, \pi - \delta_1)$ . Далее, согласно замечанию на стр. 73, произведение  $(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \alpha_n \rightarrow (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}$ , когда  $n \rightarrow \infty$ , поэтому  $J_2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно, при надлежащем выборе числа  $N = N(\varepsilon)$ ,

$$|J_2| < \frac{1}{3} \varepsilon \quad (4.7.11)$$

для всякого  $n > N$ . Таким образом, в соответствии с (4.7.10—11)

$$|J_1 + J_2 + J_3| < \varepsilon, \quad n > N,$$

что и доказывает лемму.

Завершение доказательства теоремы не представляет теперь большого труда.

Действительно, из условия 1° теоремы вытекает, что  $\varphi(x, y)$ , рассматриваемая как функция переменного  $y$ , будет кусочно-непрерывной в открытом интервале  $(-1, 1)$ , а из условия 2° следует, что интеграл от квадрата этой функции, взятый по промежутку  $(-1, 1)$ , имеет конечное значение \*\*). Поэтому, на основании леммы,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(m + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 P_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy = \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 P_m(y) \varphi(x, y) dy = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что, согласно (4.6.7), каждое из произведений

$$\frac{(m+1)}{2\left(m + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} P_m(x), \quad \frac{(m+1)}{2\left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} P_m(x)$$

\*) См., например, Г. М. Фиктенгольц [1], п° 656.

\*\*) Кусочная непрерывность  $\varphi(x, y)$  при всяком  $-1 < y < 1$ , отличным от  $y = x$ , является следствием кусочной непрерывности  $f(y)$  в этом интервале; кусочная непрерывность во всем открытом интервале  $(-1, 1)$  вытекает из кусочной гладкости, на основании которой  $\varphi(x, x-0) = f'(x-0)$ ,  $\varphi(x, x+0) = f'(x+0)$  в предположении, что  $y = x$  точка непрерывности  $f(y)$ . Конечность интеграла от квадрата  $\varphi(x, y)$  является следствием 2°.

остается ограниченным при  $m \rightarrow \infty$ , получаем, что правая часть (4.7.7) стремится к нулю, когда  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x), \quad (4.7.12)$$

что и доказывает теорему 1.

С теоретической точки зрения представляет интерес также сходимость ряда (4.7.1) в точке разрыва  $f(x)$ . Можно показать, что при выполнении условий теоремы 1 ряд (4.7.1) сходится и в этом случае, причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (4.7.13)$$

В заключение укажем, что условия 1° — 2° теоремы 1, достаточные для возможности представления функции  $f(x)$  рядом (4.7.1), могут быть значительно смягчены. Теорема разложения, справедливая для более широкого класса функций, доказана в монографии Гобсона\*).

## § 4.8. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Лежандра

Рассмотрим несколько простых примеров, поясняющих технику разложения функций в ряды по полиномам Лежандра.

Пример 1. Пусть  $f(x)$  — полином  $m$ -й степени:

$$f(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n.$$

Разложение (4.7.1) принимает в этом случае вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^m c_n P_n(x). \quad (4.8.1)$$

Для определения коэффициентов  $c_n$  нет необходимости вычислять интегралы (4.7.2) и проще найти их из системы линейных уравнений, получающейся путем подстановки в (4.8.1) явных выражений для полиномов Лежандра и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях.

Например, мы имеем

$$x^2 = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{3x^2 - 1}{2},$$

\*) Гобсон [1], гл. VII,

откуда следует  $c_2 = \frac{2}{3}$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_0 = \frac{1}{3}$ , так что

$$x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x).$$

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $f(x)$  определена равенствами:  $f(x) = 0$  при  $-1 \leq x < \alpha$ ;  $f(x) = 1$  при  $\alpha < x \leq 1$ .

По теореме 1 рассматриваемая функция разлагается в ряд (4.7.1) с коэффициентами  $c_n$ , определяемыми формулами:

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^1 P_n(x) dx.$$

Воспользовавшись равенством (4.3.5) и замечая, что  $P_n(1) = 1$ , находим:

$$c_n = -\frac{1}{2} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)], \quad c_0 = \frac{1}{2} (1 - \alpha),$$

откуда получаем искомое разложение:

$$f(x) = \frac{1}{2} (1 - \alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)] P_n(x), \quad -1 < x < 1. \quad (4.8.2)$$

Покажем, что в точке разрыва  $x = \alpha$  выполняется соотношение (4.7.13). Действительно, обозначая  $S_m(x)$  сумму  $m + 1$  первых членов ряда (4.8.2), мы имеем

$$S_m(\alpha) = \frac{1}{2} (1 - \alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [P_{n+1}(\alpha) P_n(\alpha) - P_n(\alpha) P_{n-1}(\alpha)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P_{m+1}(\alpha) P_m(\alpha).$$

Так как, согласно (4.6.7),  $P_n(\alpha) \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(\alpha) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)],$$

как это и следует из общей теории.

**ПРИМЕР 3.** Положим  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ .

Рассматриваемая функция удовлетворяет условиям теоремы 1, следовательно, разлагается в ряд (4.7.1). Для вычисления коэффициентов  $c_n$  используем следующий прием, полезный во многих случаях. Умножим разложение (4.2.3) на  $f(x)$  и проинтегрируем по проме-



жутку  $(-1, 1)$ . После элементарных вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \left[ 1+t + \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx, \quad |t| < 1, \end{aligned}$$

причем законность почленного интегрирования следует из равномерной сходимости ряда (4.2.3) в промежутке  $-1 \leq x \leq 1$ , вытекающей из оценки (4.4.2). Разлагая левую часть последнего равенства в ряд по степеням  $t$ , находим

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx,$$

откуда

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) dx = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx = -\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Из формул (4.7.2) теперь вытекает, что искомое разложение имеет вид

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad -1 < x < 1. \quad (4.8.3)$$

### § 4.9. Полиномы Эрмита. Определение и производящая функция

Другой важный класс ортогональных полиномов, встречающихся в математической физике и других приложениях, составляют полиномы Эрмита  $H_n(x)$ , которые могут быть определены при помощи равенства \*)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9.1)$$

\*) Многочлены  $H_n(x)$  были введены П. Л. Чебышевым в 1859 г., за несколько лет до опубликования работы Эрмита, в связи с чем исторически более правильно называть их многочленами Чебышева — Эрмита.

Выполнив дифференцирование в формуле (4.9.1), находим:

$H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ ,  $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ , ...  
и вообще

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad (4.9.2)$$

где  $[\nu]$  — целая часть числа  $\nu$ . В дальнейшем (§ 4.13) будет показано, что полиномы Эрмита образуют ортогональную систему функций на промежутке  $(-\infty, \infty)$  с весом  $p(x) = e^{-x^2}$ . Полиномы Эрмита могут быть представлены как коэффициенты разложения

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < \infty, \quad (4.9.3)$$

левая часть которого называется производящей функцией для этих полиномов \*).

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что  $w(x, t)$ , рассматриваемая как функция комплексного переменного  $t$ , есть целая функция, допускающая разложение в ряд Тейлора:

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)_{t=0}}{n!} t^n, \quad |t| < \infty.$$

Принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)_{t=0} = e^{x^2} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right\}_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n} \right)_{u=x} \equiv H_n(x),$$

приходим к разложению (4.9.3). Полученная формула может быть использована для вывода различных свойств полиномов Эрмита. Например, полагая в (4.9.3)  $x = 0$  и разлагая  $e^{-t^2}$  в ряд по степеням  $t$ , находим путем сравнения коэффициентов:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0. \quad (4.9.4)$$

Приведем еще одно разложение, родственное (4.9.3),

$$\begin{aligned} W(x, y, t) &= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n, \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

\*) Строго говоря, функция  $w(x, t)$  является производящей функцией полиномов  $H_n^*(x) = \frac{1}{n!} H_n(x)$ , отличающихся от полиномов Эрмита постоянным множителем.

левую часть которого можно рассматривать как производящую функцию для произведения полиномов Эрмита.

Доказательство этой формулы будет дано ниже (§ 4.11).

В частности, если положить в (4.9.5)  $y = x$ , получается

$$W(x, x, t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2x^2 t}{1+t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n!} t^n, \quad |t| < 1. \quad (4.9.6)$$

Формулы (4.9.3), (4.9.5) и (4.9.6) играют важную роль в теории рассматриваемого класса полиномов.

Полиномы Эрмита встречаются в математической физике в связи с интегрированием уравнений Лапласа и Гельмгольца в параболической системе координат, в квантовой механике и т. д. (§ 10.7—8).

### § 4.10. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x - 2t)w = 0$$

и замечая, что степенной ряд допускает почленное дифференцирование, получаем подстановкой (4.9.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x) t^n}{n!} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^{n+1}}{n!} = 0,$$

откуда, приравнявая нулю коэффициент при  $t^n$ , находим

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10.1)$$

Равенство (4.10.1) представляет собой рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Эрмита. Это соотношение может быть использовано для последовательного составления полиномов  $H_n(x)$  по первым двум.

Второе рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют рассматриваемые полиномы, получается аналогичным образом из тождества

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0.$$

Подставляя ряд (4.9.3), получаем \*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0,$$

откуда следует

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10.2)$$

Формула (4.10.2) полезна тем, что она дает выражение производной полинома Эрмита через полином Эрмита.

Из найденных рекуррентных соотношений (4.10.1—2) легко вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Эрмита. Исключая из этих соотношений  $H_{n-1}(x)$ , находим

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) = 0,$$

откуда, дифференцируя и снова принимая во внимание (4.10.2), получаем

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10.3)$$

причем справедливость этого соотношения при  $n = 0$  доказывается непосредственной проверкой. Из (4.10.3) вытекает, что функция  $u = H_n(x)$  является частным интегралом дифференциального уравнения

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0. \quad (4.10.4)$$

При помощи замены переменных легко получить другие дифференциальные уравнения, интегралы которых могут быть выражены через полиномы Эрмита. В частности, нетрудно проверить, что частным интегралом уравнения

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0 \quad (4.10.5)$$

является функция

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

и т. д.

---

\*) Возможность почленного дифференцирования ряда (4.9.3) по переменному  $x$  следует из равномерной сходимости этого ряда в области  $|x| < a$ ,  $a$  — любое конечное число. Действительно, из (4.9.2) вытекает оценка  $|H_n(x)| \leq \frac{H_n(ai)}{i^n}$ , откуда вытекает, что рассматриваемый ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \frac{H_n(ai)}{i^n} = e^{2a|t| + |t|^2},$$

поэтому сам сходится равномерно при  $|x| < a$ .

## § 4.11. Интегральные представления для полиномов Эрмита

Полиномы Эрмита допускают простые представления с помощью определенных интегралов, содержащих переменное как параметр. Для вывода этих формул воспользуемся известным интегралом\*)

$$e^{-x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt \, dt, \quad (4.11.1)$$

где  $x$  — любое вещественное или комплексное число. Дифференцируя (4.11.1)  $2n$  раз принимая во внимание определение полиномов Эрмита (§ 4.9), найдем

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11.2)$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как при  $|x| < a$  интеграл (4.11.1) мажорируется сходящимся интегралом

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2+2at} \, dt,$$

поэтому сходится равномерно в круге  $|x| \leq a$  произвольного радиуса  $a$ .

Аналогичным образом получается интегральное представление для полиномов Эрмита с четным индексом:

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt \, dt, \quad (4.11.3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что доказанные равенства (4.11.2—3) могут быть записаны в виде одной формулы

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2txi} t^n \, dt, \quad (4.11.4)$$

пригодной при любых значениях  $n = 0, 1, 2, \dots$

Полученные интегральные представления полезны при рассмотрении различных вопросов теории полиномов Эрмита.

\*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], н° 481.

В качестве одного из приложений дадим вывод равенства (4.9.5). Воспользовавшись (4.11.4), мы имеем при  $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} t^n &= \\ &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (2t)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2uxi+2vyi} (uv)^n du dv = \\ &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2uxi+2vyi} du dv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2uvt)^n}{n!} = \\ &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2uxi+2vyi-2uvt} du dv. \end{aligned}$$

На основании известного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 s^2 - 2bs} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{a^2}}, \quad R(a^2) > 0, \quad (4.11.5)$$

значение двойного интеграла в правой части равно  $W(x, y, t)$ . Законность выполненных формальных вычислений следует при этом из сходимости выражения

$$\frac{e^{|x|^2+|y|^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2|u||x|+2|v||y|} du dv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|u||v||t|)^n}{n!}$$

для всех  $|t| < 1$ .

## § 4.12. Интегральные уравнения для полиномов Эрмита

Полиномы Эрмита удовлетворяют интегральным уравнениям с симметричными ядрами простого вида. Чтобы вывести эти уравнения, заменим в разложении производящей функции (4.9.3)  $x$  на  $y$ , умножим полученный ряд на  $e^{ixy - \frac{y^2}{2}}$  ( $-\infty < x < \infty$ ) и проинтегрируем по промежутку  $(-\infty, \infty)$ . Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2yt-t^2 - \frac{y^2}{2} + ixy} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy - \frac{y^2}{2}} dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy - \frac{y^2}{2}} H_n(y) dy. \end{aligned} \quad (4.12.1)$$

Перемена порядка интегрирования законна, так как, воспользовавшись неравенством  $|H_n(x)| \leq i^{-n} H_n(|x|)$ , мы имеем \*)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{ixy - \frac{y^2}{2}} \right| dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|H_n(y)|}{n!} |t^n| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{|t|}{i}\right)^n}{n!} H_n(t|y|) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2} + 2|y||t| + |t|^2} dy, \end{aligned}$$

следовательно, имеет место абсолютная сходимость.

Вычисляя интеграл в левой части (4.12.1), находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2yt - t^2 - \frac{y^2}{2} + ixy} dy &= \sqrt{2\pi} e^{t^2 + 2txi - \frac{x^2}{2}} = \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ti)^n}{n!} H_n(x). \quad (4.12.2) \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  в (4.12.1—2) дает искомое интегральное уравнение для полиномов Эрмита:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \frac{1}{i^n \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12.3)$$

Если рассмотреть отдельно случай четного и нечетного  $n$  и принять во внимание, что  $H_{2m}(x)$  является четной, а  $H_{2m+1}(x)$  — нечетной функцией переменного  $x$ , то из (4.12.3) вытекают два других интегральных уравнения с вещественными ядрами:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{2m}(y) \cos xy dy, \quad (4.12.4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m+1}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{2m+1}(y) \sin xy dy, \quad (4.12.5)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

\*) Это неравенство вытекает непосредственно из формулы (4.9.2).

### § 4.13. Ортогональность полиномов Эрмита

Легко показать, что полиномы Эрмита  $H_n(x)$  ортогональны на промежутке  $(-\infty, \infty)$  с весом  $e^{-x^2}$ , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (4.13.1)$$

Действительно, полагая  $u_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$  и воспользовавшись уравнением (4.10.5), имеем:

$$u_n'' + (2n + 1 - x^2) u_n = 0, \quad u_m'' + (2m + 1 - x^2) u_m = 0,$$

откуда, умножив первое из этих уравнений на  $u_m$ , второе — на  $u_n$ , получаем

$$\frac{d}{dx} (u_n' u_m - u_m' u_n) + 2(n - m) u_m u_n = 0.$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку  $(-\infty, \infty)$ , находим

$$(n - m) \int_{-\infty}^{\infty} u_m u_n dx = 0,$$

откуда непосредственно вытекает требуемое равенство (4.13.1).

Значение интеграла (4.13.1) при  $m = n$  может быть найдено следующим образом: заменим в рекуррентном соотношении (4.10.1) значок  $n$  на  $n - 1$ , умножим полученное уравнение на  $H_n(x)$ , а уравнение (4.10.1) на  $H_{n-1}(x)$  и вычтем одно из другого. Мы находим тогда

$$H_n^2(x) + 2(n - 1) H_n(x) H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x) H_{n-1}(x) - 2n H_{n-1}^2(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Умножая последнее равенство на  $e^{-x^2}$  и интегрируя по промежутку  $(-\infty, \infty)$ , получаем на основании свойства ортогональности (4.13.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Последовательное применение этой формулы дает \*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{n-1} n!, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad n = 2, 3, \dots$$

\*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = 2\sqrt{\pi}.$$



Непосредственная проверка показывает, что результат справедлив также при  $n = 0$  и  $n = 1$ . Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13.2)$$

Формулы (4.13.1—2) играют важную роль в теории разложения функций в ряды по полиномам Эрмита (§ 4.15). Они также показывают, что функции

$$\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную систему функций на промежутке  $-\infty, \infty$ .

#### § 4.14. Асимптотическое представление полиномов Эрмита для больших значений индекса $n$

Полиномы Эрмита  $H_n(x)$  допускают простые асимптотические представления, удобные для изучения поведения рассматриваемых функций при  $n \rightarrow \infty$ . Эти представления были впервые получены А. А. Адамовым \*) и играют важную роль в теории разложения произвольных функций в ряды по полиномам Эрмита. Для вывода асимптотических представлений может быть использован общий метод, примененный в § 4.6 для решения аналогичной задачи в теории полиномов Лежандра. При этом мы исходим из дифференциального уравнения (4.10.5) для функции  $u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ , которое мы запишем в форме

$$u'' + (2n + 1)u = x^2 u \quad (4.14.1)$$

и проинтегрируем по методу Лагранжа, считая правую часть известной функцией. Принимая во внимание начальные условия  $u(0) = H_n(0)$ ,  $u'(0) = H'_n(0)$ , получим

$$u(x) = H_n(0) \cos \sqrt{2n+1} x + H'_n(0) \frac{\sin \sqrt{2n+1} x}{\sqrt{2n+1}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 u(y) \sin [\sqrt{2n+1}(x-y)] dy. \quad (4.14.2)$$

\*) А. А. Адамов [1].

Если воспользоваться теперь соотношениями:

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)}, \quad H_{2m+1}(0) = 0, \quad H'_{2m}(0) = 0, \\ H'_{2m+1}(0) = 2(-1)^m \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(m+1)},$$

вытекающими из формул (4.9.4), (4.10.2) и (1.2.1), то последнее уравнение может быть записано в форме

$$u(x) = \alpha_n \left[ \cos \left( \sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2} \right) + r_n(x) \right], \quad (4.14.3)$$

где  $\alpha_n$  обозначает первое или второе из следующих выражений:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2n+1}}, \quad (4.14.4)$$

в зависимости от того, будет  $n$  четным или нечетным числом, и

$$r_n(x) = \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 u(y) \sin[\sqrt{2n+1}(x-y)] dy. \quad (4.14.5)$$

Для оценки остатка  $r_n(x)$  при произвольном вещественном  $x$  воспользуемся неравенством Буняковского — Шварца. Принимая во внимание (4.13.2), имеем

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \left\{ \int_0^{|x|} y^4 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{|x|} u^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \left\{ \int_0^{|x|} y^4 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^\infty u^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \beta_n |x|^{\frac{5}{2}}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \approx 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}, \quad 2^n n! \sqrt{\pi} \approx 2^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \pi, \quad (4.14.6)$$

поэтому произведение  $\beta_n n^{\frac{1}{4}}$  ограничено при любых  $n \geq 0$  и из полученного выше неравенства вытекает

$$|r_n(x)| \leq C |x|^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.14.7)$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

Последнее неравенство показывает, что для любого конечного  $x$  имеет место асимптотическая формула

$$u(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \alpha_n \cos\left(\sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (4.14.8)$$

или

$$H_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} x^2} \cos\left(\sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (4.14.9)$$

Более точные выражения для полиномов Эрмита  $H_n(x)$  с большим индексом  $n$  приведены в монографиях Сеге [1] и Сансоне [1].

### § 4.15. Разложение функций в ряды по полиномам Эрмита

Покажем, что произвольная функция  $f(x)$ , определенная на промежутке  $(-\infty, \infty)$  и удовлетворяющая некоторым общим условиям, допускает представление в виде ряда по полиномам Эрмита:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.15.1)$$

Коэффициенты  $c_n$  могут быть формально определены на основании свойства ортогональности (§ 4.13). В самом деле, умножив (4.15.1) на  $e^{-x^2} H_m(x)$  и интегрируя почленно по промежутку  $(-\infty, \infty)$ , получаем, принимая во внимание (4.13.1) и (4.13.2),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^m m! \sqrt{\pi} c_m,$$

откуда

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15.2)$$

Следующая теорема устанавливает простые достаточные условия, при выполнении которых ряд (4.15.1) с коэффициентами, вычисленными по формулам (4.15.2), сходится и имеет своей суммой  $f(x)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f(x)$  — произвольная вещественная функция, заданная на интервале  $(-\infty, \infty)$  и удовлетворяющая условиям:

1°.  $f(x)$  есть кусочно-гладкая функция во всяком конечном интервале  $(-a, a)$ ;

2°. интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx$  имеет конечное значение.

Тогда ряд (4.15.1) с коэффициентами  $c_n$ , определенными по формулам (4.15.2), сходится к  $f(x)$  во всякой точке  $x$ , являющейся точкой непрерывности этой функции.

Для доказательства установим прежде всего, что интегралы (4.15.2) имеют смысл, следовательно, коэффициенты фактически могут быть вычислены. Действительно, эти интегралы, взятые в любых конечных пределах, существуют и в силу неравенства  $|f(x)e^{-x^2}H_n(x)| \leq \leq \frac{1}{2} [f^2(x)e^{-x^2} + H_n^2(x)e^{-x^2}]$  модуль подынтегральной функции в (4.15.2) не превосходит подынтегрального выражения интеграла, сходящегося на основании 2° и (4.13.2). Поэтому несобственные интегралы (4.15.2) сходятся.

Обозначим  $S_m(x)$  сумму  $m+1$  первых членов ряда (4.15.1). Подставляя значения коэффициентов, получаем

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \sum_{n=0}^m c_n H_n(x) = \sum_{n=0}^m H_n(x) \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} H_n(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} K_m(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.15.3)$$

где

$$K_m(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^m \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n!}. \quad (4.15.4)$$

Для того чтобы найти значение последней суммы, умножим рекуррентное соотношение для полиномов Эрмита (4.10.1) на  $H_n(y)$  и вычтем из полученного уравнения такое же уравнение с переставленными  $x$  и  $y$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} [H_{n+1}(x)H_n(y) - H_{n+1}(y)H_n(x)] - 2n[H_n(x)H_{n-1}(y) - \\ - H_n(y)H_{n-1}(x)] = 2(x-y)H_n(x)H_n(y), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Разделив последнее равенство на  $2^n n!$  и суммируя по значку  $n$  от 1 до  $m$ , находим, принимая во внимание, что  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,

$$2(x-y) \sum_{n=1}^m \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} = \frac{H_{m+1}(x)H_m(y) - H_{m+1}(y)H_m(x)}{2^m m!} - 2(x-y),$$

откуда

$$K_m(x, y) = \frac{H_{m+1}(x)H_m(y) - H_{m+1}(y)H_m(x)}{(x-y) \cdot 2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}. \quad (4.15.5)$$

Отметим еще важное тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_m(x, y) e^{-y^2} dy = 1, \quad (4.15.6)$$

непосредственно вытекающее из (4.15.4), если воспользоваться формулами (4.13.1—2)\*).

Предположим теперь, что  $x$  есть точка непрерывности  $f(x)$  и рассмотрим разность  $S_m(x) - f(x)$ . На основании формул (4.15.3) и (4.15.6) эта разность может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} S_m(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_m(x, y) e^{-y^2} [f(y) - f(x)] dy = \\ &= \frac{H_m(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy - \\ &\quad - \frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) \varphi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.15.7)$$

где для сокращения положено

$$\varphi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Доказательство теоремы 2 равносильно доказательству утверждения, что правая часть (4.15.7) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Для этого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $\varphi(x)$  — произвольная вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

1°.  $\varphi(x)$  — кусочно-непрерывная функция во всяком конечном интервале  $(-a, a)$ ;

2°.  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) e^{-x^2} \varphi^2(x) dx$  имеет конечное значение.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (4.15.8)$$

\*) На основании этих формул

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n(y) H_0(y) dy = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ \sqrt{\pi}, & n = 0. \end{cases}$$

Для доказательства леммы представим интеграл (4.15.8) в виде суммы интегралов:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \\
 &= \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} \dots + \int_{-a}^a \dots + \int_a^{\infty} \dots \right\} = J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned} \tag{4.15.9}$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца, находим:

$$\begin{aligned}
 |J_1| &\leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2} |H_n(x)| |\varphi(x)| dx \leq \\
 &\leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} (1+x^2) e^{-x^2 \varphi^2(x)} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left\{ \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} (1+x^2) e^{-x^2 \varphi^2(x)} dx \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.15.10}$$

и аналогично

$$|J_3| \leq \left\{ \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^{\infty} (1+x^2) e^{-x^2 \varphi^2(x)} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.15.11}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx \tag{4.15.12}$$

и докажем, что для любых значений  $n$

$$I = O(1). \tag{4.15.13}$$

Для доказательства воспользуемся равенством (см. стр. 123, пример 8)

$$I = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx. \tag{4.15.14}$$

Если представить (4.15.14) в виде

$$I = \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^1 + \int_1^{\infty} \right]$$

и выполнить во втором интеграле замену переменной  $x \rightarrow x^{-1}$ , то получим

$$I = \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{e^{-x^2} + (-1)^n e^{-x^{-2}}}{1+x^2} dx. \quad (4.15.15)$$

Так как  $e^{-x^2} + (-1)^n e^{-x^{-2}} \leq 2$  для  $0 \leq x \leq 1$ , то из (4.15.15) следует \*)

$$I \leq \frac{4n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{dx}{1+x^2} = \frac{n^{1/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Оценка (4.15.13) вытекает теперь из асимптотических формул теории  $\Gamma$ -функции (§ 1.4).

Из ограниченности  $I$  и условия 2° леммы следует, что можно выбрать такое большое  $a = a(\varepsilon)$ , что каждый из интегралов  $J_1$  и  $J_3$  будет удовлетворять соответственно неравенству

$$|J_1| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad |J_3| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad (4.15.16)$$

где  $\varepsilon$  — произвольно малое положительное число.

Считая в дальнейшем, что  $a$  фиксировано указанным образом и заменяя в интеграле  $J_2$  полином Эрмита его выражением (4.14.3), имеем:

$$J_2 = \frac{\alpha_n n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left[ \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) \cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right) dx + \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) r_n(x) dx \right]. \quad (4.15.17)$$

Так как  $\varphi(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$  — кусочно-непрерывная функция, первый из интегралов стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ . Второй интеграл также стремится к нулю, ибо, в соответствии с (4.14.7), подынтегральное

\*) Для вычисления интеграла пользуемся подстановкой  $x = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ .

выражение есть  $O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$ , равномерно во всем промежутке  $(-a, a)$ . Множитель перед квадратными скобками ограничен, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_2 = 0. \quad (4.15.18)$$

Из (4.15.16 и 18) следует

$$|J| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon), \quad (4.15.19)$$

что и доказывает лемму.

Завершение доказательства теоремы 2 теперь может быть получено весьма простым образом. В самом деле, из условия 1° теоремы вытекает, что  $\varphi(x, y)$ , рассматриваемая как функция переменного  $y$ , есть кусочно-гладкая функция во всяком конечном интервале  $(-a, a)$ , а из условия 2° следует, что интеграл от  $(1+y^2)e^{-y^2}\varphi^2(y)$ , взятый по промежутку  $(-\infty, \infty)$ , имеет конечное значение\*). Поэтому, согласно лемме,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^{\frac{1}{4}}}{\{2^{m+1}(m+1)!\sqrt{\pi}\}^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy = \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{\frac{1}{4}}}{(2^m m! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) \varphi(x, y) dy = 0. \end{aligned} \quad (4.15.20)$$

С другой стороны, на основании (4.14.9) и формулы Стирлинга, каждое из выражений

$$\frac{\{2^{m+1}(m+1)!\sqrt{\pi}\}^{\frac{1}{2}}}{(m+1)^{\frac{1}{4}}} \frac{H_m(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}, \quad \frac{(2^m m! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}} \frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}$$

\*) Действительно, для достаточно большого положительного  $b > x$

$$\begin{aligned} \int_b^{\infty} (1+y^2) e^{-y^2} \varphi^2(y) dy &= \int_b^{\infty} \left[ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right]^2 (1+y^2) e^{-y^2} dy = \\ &= O(1) \int_b^{\infty} [f^2(y) + f^2(x)] e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

и аналогичная оценка получается для интеграла, взятого по промежутку  $(-\infty, -b)$ .



остается ограниченным, когда  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому из (4.15.7) вытекает

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [S_m(x) - f(x)] = 0, \quad (4.15.21)$$

что и доказывает теорему.

Можно доказать, что ряд (4.15.1) сходится также и в точке разрыва  $f(x)$  и значение его суммы в этом случае будет  $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ .

По поводу доказательств теоремы разложения по полиномам Эрмита при других ограничениях, налагаемых на функцию  $f(x)$ , мы отсылаем читателя к специальной литературе \*).

### § 4.16. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Эрмита

Для применения теоремы 2 к функциям частного вида требуется вычислить интегралы типа (4.15.2). В большинстве случаев это осуществляется путем замены полинома Эрмита его явным выражением (4.9.1) или одним из интегральных представлений § 4.11. Следующие примеры могут служить хорошей иллюстрацией методов, используемых при разложении функций в ряды по полиномам Эрмита.

**Пример 1.** Пусть  $f(x) = x^{2p}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ).

Условия теоремы 2 выполнены, и мы имеем

$$x^{2p} = \sum_{n=0}^p c_{2n} H_{2n}(x),$$

где

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} e^{-x^2} H_{2n}(x) dx.$$

Воспользовавшись (4.9.1) и интегрируя  $2n$  раз по частям, находим

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} (e^{-x^2})^{(2n)} dx = \\ &= \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2n} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \Gamma\left(p - n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

\*) См. Сеге [1], Сансоне [1], Кораус [1].

На основании формулы удвоения  $\Gamma$ -функции (1.2.3)

$$2^{2p-2n}\Gamma\left(p-n+\frac{1}{2}\right)(p-n)! = \sqrt{\pi}(2p-2n)!,$$

поэтому найденное выше выражение для коэффициента  $c_{2n}$  упрощается и принимает вид

$$c_{2n} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!(p-n)!}.$$

Таким образом, искомое разложение будет

$$x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(p-n)!}, \quad (4.16.1)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad -\infty < x < \infty.$$

Аналогичным способом получится разложение

$$x^{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}} \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(p-n)!}, \quad (4.16.2)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad -\infty < x < \infty.$$

Пример 2.  $f(x) = e^{ax}$  ( $a$  — произвольное вещественное или комплексное число).

Применяя тот же прием, что и выше, находим

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

где

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ax} H_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} (e^{-x^2})^{(n)} dx = \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax-x^2} dx = \frac{a^n}{2^n n!} e^{\frac{a^2}{4}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{ax} = e^{\frac{a^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.16.3)$$

Другой способ вывода этой формулы заключается в замене  $t = \frac{a}{2}$  в равенстве (4.9.3).

Пример 3. Положим  $f(x) = e^{-a^2 x^2}$ ,  $R(a^2) > -1$ .

Воспользовавшись теоремой разложения, имеем

$$e^{-a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x),$$

где

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2n}(x) dx.$$

Для вычисления интеграла заменим полином Эрмита интегральным представлением (4.11.2). Тогда после перемены порядка интегрирования получим \*)

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2(-1)^n}{\pi (2n)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2xt dx = \\ &= \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi} (2n)! a} \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+a^2)} t^{2n} dt = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} (2n)!} \frac{a^{2n+1}}{(1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{n-\frac{1}{2}} ds = \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} (2n)!} \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

причем для упрощения снова использована формула удвоения (1.2.3). Подставляя найденное значение  $c_{2n}$ , имеем

$$e^{-a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x), \quad (4.16.4)$$

$$-\infty < x < \infty; \quad R(a^2) > -1.$$

Пример 4.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

В данном случае искомое разложение имеет вид

$$\operatorname{sgn} x = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} H_{2n+1}(x),$$

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1} (2n+1)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x e^{-x^2} H_{2n+1}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2n} (2n+1)! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} H_{2n+1}(x) dx.$$

\*) Законность этой операции следует из абсолютной сходимости.

Воспользовавшись тождеством

$$e^{-x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx} e^{-x^2} H_{n-1}(x), \quad (4.16.5)$$

следующим из равенств (4.10.2) и (4.10.3), находим

$$c_{2n+1} = \frac{H_{2n}(0)}{2^{2n} (2n+1)! \sqrt{\pi}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1) n! \sqrt{\pi}},$$

откуда

$$\operatorname{sgn} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1) n!} H_{2n+1}(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.16.6)$$

**Пример 5.** С помощью интегрирования (или дифференцирования) полученных формул по переменному  $x$  или параметру  $a$  можно вывести ряд новых разложений рассматриваемого типа.

В частности, если проинтегрировать ряд (4.16.4) по  $x$  в промежутке  $(0, x)$  и воспользоваться соотношением (4.10.2), получим

$$\Phi(ax) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{H_{2n+1}(x)}{2n+1}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.16.7)$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Другое интересное разложение получается, если умножить ряд (4.16.4) на  $(1+a^2)^{-1}$  и проинтегрировать по  $a$  в промежутке  $(0, \infty)$ . Принимая во внимание равенство, приведенное на стр. 32, находим

$$e^{x^2} [1 - \Phi(x)] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \frac{H_{2n}(x)}{2n+1}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (4.16.8)$$

Дополнительные примеры на разложение функций в ряды по полиномам Эрмита приведены в конце главы в качестве упражнений.

### § 4.17. Полиномы Лагерра. Определение и производящая функция

К числу ортогональных полиномов, имеющих большое значение для приложений, относятся также полиномы Лагерра  $L_n^\alpha(x)$ , которые для любых вещественных значений  $\alpha > -1$  определяются посредством формулы \*)

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17.1)$$

\*) Полиномы  $L_n^\alpha(x)$  только постоянным множителем отличаются от полиномов Сонина  $T_n^\alpha(x)$ , исследованных последним в работе [1]. Лагерром изучен частный случай  $\alpha = 0$ . В литературе полиномы  $L_n^\alpha(x)$  иногда называются обобщенными полиномами Лагерра.

Выполнив дифференцирование в правой части, находим:

$$\begin{aligned} L_0^\alpha(x) &= 1, & L_1^\alpha(x) &= 1 + \alpha - x, \\ L_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2} [(1 + \alpha)(2 + \alpha) - 2(2 + \alpha)x + x^2] \end{aligned}$$

и т. д.

Общее выражение для полинома  $n$ -го порядка получается путем применения правила Лейбница, что приводит к формуле вида

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \frac{(-x)^k}{k!(n - k)!}, \quad (4.17.2)$$

где для всех  $k < n$  отношение гамма-функций может быть заменено произведением

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots [n + \alpha - (n - k - 1)].$$

Ниже (§ 4.21) будет показано, что полиномы Лагерра  $L_n^\alpha(x)$  ортогональны на промежутке  $(0, \infty)$  с весом  $p(x) = x^\alpha e^{-x}$ .

Полиномы Лагерра встречаются при рассмотрении многих вопросов математической физики, например, при интегрировании уравнения Гельмгольца в параболических координатах, в теории атома водорода, в теории распространения электромагнитных колебаний вдоль длинных линий и т. д.

Простейший класс полиномов Лагерра составляют полиномы  $L_n^0(x) = L_n(x)$ . Другой важный частный случай представляют полиномы  $L_n^{\pm \frac{1}{2}}(x)$ , просто связанные с полиномами Эрмита (§ 4.19).

Теория полиномов Лагерра может быть развита, исходя из представления этих полиномов как коэффициентов в разложении производящей функции:

$$\omega(x, t) = (1 - t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1. \quad (4.17.3)$$

Чтобы установить справедливость этого разложения, заметим, что левая часть есть функция комплексного переменного  $t$ , регулярная в круге  $|t| < 1$ , поэтому в рассматриваемой области должно иметь место разложение вида

$$\omega(x, t) = (1 - t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha(x) t^n.$$

Согласно известной теореме теории функций, коэффициенты  $c_n^\alpha(x)$  могут быть выражены через контурные интегралы:

$$c_n^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1 - t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} t^{-n-1} dt, \quad (4.17.4)$$

взяты по произвольному замкнутому контуру  $C$ , охватывающему точку  $t=0$  и расположенному внутри круга  $|t| < 1$ . Выбирая контур  $C$  достаточно малых размеров и вводя новое переменное интегрирования  $u = \frac{x}{1-t}$ , находим

$$c_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2\pi i} \int_{C'} \frac{e^{-u} u^{n+\alpha}}{(u-x)^{n+1}} du, \quad (4.17.5)$$

где  $C'$  — малый замкнутый контур, охватывающий точку  $u=x$ . Последние интегралы могут быть вычислены с помощью теории вычетов, что дает

$$c_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \left[ \frac{d^n}{du^n} e^{-u} u^{n+\alpha} \right]_{u=x} \equiv L_n^\alpha(x),$$

откуда непосредственно следует справедливость разложения (4.17.3). В заключение приведем формулу, родственную (4.17.3):

$$\begin{aligned} W(x, y, t) &= (1-t)^{-1} e^{-\frac{x+y}{1-t}t} (xyt)^{-\frac{\alpha}{2}} I_\alpha \left[ \frac{2(xyt)^{\frac{1}{2}}}{1-t} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n, \quad |t| < 1, \alpha > -1, \end{aligned} \quad (4.17.6)$$

где  $I_\alpha(z)$  — функция Бесселя мнимого аргумента\*). Доказательство этой формулы дано в работе Хилла [1].

Функцию  $W(x, y, t)$  можно рассматривать как производящую функцию для произведения полиномов Лагерра. В приложениях наибольшее значение имеет частный случай рассматриваемого равенства

$$\begin{aligned} W(x, x, t) &= (1-t)^{-1} e^{-\frac{2x}{1-t}t} x^{-\alpha} t^{-\frac{\alpha}{2}} I_\alpha \left( \frac{2xt^{\frac{1}{2}}}{1-t} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! [L_n^\alpha(x)]^2}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n, \quad |t| < 1, \alpha > -1. \end{aligned} \quad (4.17.7)$$

#### § 4.18. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра

Полиномы Лагерра удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, связывающим полиномы с различными индексами. Эти соотношения могут быть выведены из разложения производящей

\*) В отношении функций Бесселя см. гл. V. Функция  $I_\alpha(z)$  определена в § 5.7.

функции (4.17.3), если принять во внимание дифференциальные уравнения для  $w(x, t)$ . Так, например, из легко проверяемого тождества

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)] w = 0$$

следует, после подстановки разложения (4.17.3),

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n L_n^\alpha(x) t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n = 0,$$

откуда, приравнявая нулю коэффициент при  $t^n$ , получаем

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x - \alpha - 2n - 1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \quad (4.18.1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Аналогичным образом из тождества

$$(1-t) \frac{\partial w}{\partial x} + t w = 0$$

находим \*)

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^{n+1} = 0,$$

откуда имеем

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx} + L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18.2)$$

Исключая  $L_{n-1}^\alpha(x)$  из уравнений (4.18.1—2), получаем \*\*)

$$(x - n - 1) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + (n+1) \frac{dL_{n+1}^\alpha(x)}{dx} +$$

$$+ (2n + 2 + \alpha - x) L_n^\alpha(x) - (n+1) L_{n+1}^\alpha(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18.3)$$

\*) Для обоснования возможности дифференцирования ряда (4.17.3), члены которого регулярные функции, достаточно доказать равномерную сходимость этого ряда. Пусть  $|x| < a$ ,  $a$  — любое конечное число. Из (4.17.2) тогда следует, что, при всяком  $\alpha > -1$ ,  $|L_n^\alpha(x)| \leq L_n^\alpha(-a)$ , поэтому ряд (4.17.3) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t|^n L_n^\alpha(-a) = (1 - |t|)^{-\alpha-1} e^{\frac{\alpha|t|}{1-|t|}}$$

и сходится равномерно в рассматриваемой области.

\*\*) В последующих рассуждениях справедливость полученных соотношений при первых значениях  $n$  не вытекает из общих формул, однако легко проверяется подстановкой полиномов  $L_0^\alpha(x)$ ,  $L_1^\alpha(x)$ , ...

Наконец, заменяя в последнем равенстве  $n$  на  $n-1$  и исключая производную  $\frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx}$  с помощью соотношения (4.18.2), находим

$$x \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.18.4)$$

Последняя формула дает возможность выразить производную от полинома Лагерра через эти полиномы.

Рекуррентные соотношения другого типа, содержащие полиномы с разными верхними индексами, получаются, если рассматривать производящую функцию также как функцию параметра  $\alpha$  и установить связь между  $\varpi(x, t, \alpha)$  и  $\varpi(x, t, \alpha+1)$ .

Первое из этих соотношений вытекает из тождества

$$(1-t)\varpi(x, t, \alpha+1) = \varpi(x, t, \alpha).$$

Подставляя разложение (4.17.3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в левой и правой частях равенства, выводим

$$L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^\alpha(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.18.5)$$

Аналогичным образом из соотношения

$$\frac{\partial \varpi(x, t, \alpha)}{\partial x} = -t\varpi(x, t, \alpha+1)$$

вытекает другая полезная формула рассматриваемого типа:

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.18.6)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (4.18.2) и (4.18.4), легко получить дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра. Для этого продифференцируем (4.18.4) по  $x$  и исключим  $\frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx}$  и  $L_{n-1}^\alpha(x)$  с помощью соотношений (4.18.2) и (4.18.4). Мы имеем тогда

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha(x)}{dx^2} + (1+\alpha-x) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nL_n^\alpha(x) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.18.7)$$

Последний результат показывает, что функция  $u = L_n^\alpha(x)$  является частным решением дифференциального уравнения второго порядка

$$xu'' + (1+\alpha-x)u' + nu = 0. \quad (4.18.8)$$

Уравнение (4.18.8) встречается в математической физике и играет важную роль в теории полиномов Лагерра. С помощью замены переменных можно получить ряд других уравнений, интегралы которых



могут быть выражены через полиномы Лагерра. Так, нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения

$$xu'' + (1 + \alpha - 2\nu)u' + \left[ n + \frac{1 + \alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\nu(\nu - \alpha)}{x} \right] u = 0, \quad (4.18.9)$$

$$u'' + \left[ 4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2} \right] u = 0, \quad (4.18.10)$$

имеют частные решения соответственно

$$u = e^{-\frac{x}{2}} x^\nu L_n^\alpha(x);$$

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha + \frac{1}{2}} L_n^\alpha(x^2).$$

### § 4.19. Интегральные представления для полиномов Лагерра. Связь между полиномами Лагерра и Эрмита

Полиномы Лагерра  $L_n^\alpha(x)$  допускают простое представление с помощью определенных интегралов, содержащих переменное  $x$  как параметр. Для того чтобы получить это представление, предположим, что  $x$  — вещественное положительное число и воспользуемся формулой

$$x^{n+\alpha} e^{-x} = \int_0^\infty (\sqrt{xt})^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt, \quad (4.19.1)$$

где  $J_\nu(z)$  — функция Бесселя порядка  $\nu$ .\*

Дифференцируя (4.19.1) по  $x$  и принимая во внимание равенство

$$\frac{d}{du} u^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{u}) = u^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}),$$

вытекающее из (5.3.6), если положить в первой из формул  $z = 2\sqrt{u}$ , находим последовательно

$$\frac{d^m}{dx^m} (x^{m+\alpha} e^{-x}) = \int_0^\infty (\sqrt{xt})^{n-m+\alpha} J_{m-n+\alpha}(2\sqrt{xt}) t^m e^{-t} dt, \quad (4.19.2)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Законность дифференцирования под знаком интеграла может быть легко обоснована.

\*) В отношении функций Бесселя см. гл. V. Формула (4.19.1) является следствием формулы (5.15.2), если положить в последней

$$a = 1, \quad b = 2\sqrt{x}, \quad x = \sqrt{t}, \quad \nu = n + \alpha.$$

Полагая в (4.19.2)  $m = n$  и принимая во внимание формулу (4.17.1), получаем искомое интегральное представление для полиномов Лагерра:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^\infty t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt, \quad (4.19.3)$$

$$\alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Формула (4.19.3) доказана в предположении, что  $x$  — вещественное положительное число, однако с помощью принципа аналитического продолжения ее легко распространить на любые комплексные значения  $x$ .

Из (4.19.3) можно вывести одно важное следствие, если положить  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$  и принять во внимание известные формулы теории бесселевых функций (5.8.1—2). Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} \cos 2\sqrt{xt} dt = \\ &= \frac{e^x}{n!} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n} \cos 2\sqrt{xu} du, \end{aligned} \quad (4.19.4)$$

$$\begin{aligned} L_n^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi} \sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-t} t^n \sin 2\sqrt{xt} dt = \\ &= \frac{e^x}{n! \sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n+1} \sin 2\sqrt{xu} du, \end{aligned}$$

откуда, на основании формул (4.11.2—3), следует:

$$\begin{aligned} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x}), \\ L_n^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!} \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad (4.19.5)$$

где  $H_n(x)$  — полином Эрмита  $n$ -го порядка.

Полученные формулы (4.19.5), устанавливающие связь между двумя классами ортогональных полиномов, позволяют рассматривать теорию полиномов Эрмита как специальный раздел теории полиномов Лагерра\*).

\*) Заметим, что справедливость соотношений (4.19.5) может быть установлена также непосредственно из разложений (4.17.2) и (4.9.2).

## § 4.20. Интегральное уравнение для полиномов Лагерра

Полиномы Лагерра удовлетворяют простому интегральному уравнению с симметричным ядром. Для того чтобы получить это уравнение, воспользуемся разложением (4.17.3)

$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1, \quad \alpha > -1, \quad (4.20.1)$$

заменяем в нем  $x$  на  $y$ , умножим на  $e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy})$ , где  $J_\alpha(z)$  — функция Бесселя порядка  $\alpha$ , и проинтегрируем по промежутку  $(0, \infty)$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}} \frac{1+t}{1-t} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) dy = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) L_n^\alpha(y) dy, \end{aligned} \quad (4.20.2)$$

при условии, что почленное интегрирование ряда законно. Последнее нетрудно обосновать, если предположить, что  $|t| < \frac{1}{3}$ . Действительно, воспользовавшись неравенствами\*)

$$|L_n^\alpha(x)| \leq L_n^\alpha(-x), \quad |J_\alpha(x)| \leq I_\alpha(x), \quad x \geq 0, \quad \alpha > -1,$$

$I_\alpha(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |J_\alpha(\sqrt{xy})| e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n |L_n^\alpha(y)| dy \leq \\ \leq \int_0^\infty I_\alpha(\sqrt{xy}) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n L_n^\alpha(-y) dy = \\ = (1-|t|)^{-\alpha-1} \int_0^\infty I_\alpha(\sqrt{xy}) y^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1-3|t|}{1-|t|} dy, \end{aligned}$$

где для суммирования ряда снова использована формула (4.20.1).

При  $|t| < \frac{1}{3}$ ,  $\alpha > -1$  последний интеграл сходится, в чем нетрудно убедиться, рассматривая асимптотическое поведение функции  $I_\alpha(x)$  при больших и малых  $x$ . Поэтому имеет место абсолютная сходимость правой части равенства (4.20.2), обеспечивающая законность изменения порядка суммирования и интегрирования.

\*) Первое из этих неравенств следует из формулы (4.17.2), второе вытекает из разложения функций Бесселя в степенные ряды.

Полагая для вычисления интеграла в левой части (4.20.2)  $\sqrt{y} = u$  и воспользовавшись формулой (5.15.2), получаем при  $|t| < 1^*$ )

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2} \frac{1+t}{1-t}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) dy &= \\ &= 2(1+t)^{-\alpha-1} x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2} \frac{1-t}{1+t}} = 2x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x) (-t)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех  $|t| < \frac{1}{3}$  справедливо равенство

$$2x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n L_n^\alpha(x) t^n = \sum_{n=0}^\infty t^n \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) L_n^\alpha(y) dy,$$

откуда, если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , следует искомое интегральное уравнение

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^\infty J_\alpha(\sqrt{xy}) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(y) dy, \quad (4.20.3)$$

$\alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

При  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$  это уравнение переходит в соответствующие интегральные уравнения для полиномов Эрмита (4.11.2—3).

## § 4.21. Ортогональность полиномов Лагерра

Одним из наиболее важных свойств полиномов Лагерра является ортогональность этих полиномов на промежутке  $(0, \infty)$  с весом  $e^{-x} x^\alpha$ .

Для того чтобы получить это свойство, положим  $u_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x)$  и заметим, что на основании (4.18.9) функции  $u_n(x)$  и  $u_m(x)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} (xu_n')' + \left( n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_n &= 0, \\ (xu_m')' + \left( m + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_m &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое из этих уравнений на  $u_m$ , второе на  $u_n$  и интегрируя по промежутку  $(0, \infty)$ , находим

$$x(u_n' u_m - u_m' u_n) \Big|_0^\infty + (n-m) \int_0^\infty u_m u_n dx = 0.$$

\*) Для таких  $t$   $R\left(\frac{1+t}{1-t}\right) > 0$ , поэтому условие сходимости выполнено.

При  $\alpha > -1$  первое слагаемое исчезает на обоих пределах\*), поэтому для всех  $m \neq n$

$$\int_0^{\infty} u_m u_n dx = 0,$$

или

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_m^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad \alpha > -1. \quad (4.21.1)$$

Чтобы найти значение интеграла (4.21.1) при  $m = n$ , умножим соотношение (4.18.1) на  $L_{n-1}^{\alpha}(x)$ , уравнение, полученное из (4.18.1) заменой  $n$  на  $n-1$ , умножим на  $L_n^{\alpha}(x)$ , и вычтем одно из другого. Тогда получим

$$\begin{aligned} n [L_n^{\alpha}(x)]^2 - (n + \alpha) [L_{n-1}^{\alpha}(x)]^2 - (n + 1) L_{n+1}^{\alpha}(x) L_{n-1}^{\alpha}(x) + \\ + 2L_n^{\alpha}(x) L_{n-1}^{\alpha}(x) + (n + \alpha - 1) L_n^{\alpha}(x) L_{n-2}^{\alpha}(x) = 0, \\ n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Умножая последнее равенство на  $x^{\alpha} e^{-x}$  и интегрируя по промежутку  $(0, \infty)$ , получаем на основании свойства ортогональности (4.21.1)

$$n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2 dx = (n + \alpha) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_{n-1}^{\alpha}(x)]^2 dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Последовательное применение этой формулы дает\*\*)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2 dx = \\ = \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)}{n(n-1) \dots 3 \cdot 2} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_1^{\alpha}(x)]^2 dx = \\ = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

\*) Если подставить  $u_m$  и  $u_n$ , то легко видеть, что это слагаемое есть  $O(x^{1+\alpha})$  при  $x \rightarrow 0$ .

\*\*) Непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_1^{\alpha}(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} (1 + \alpha - x)^2 dx = (\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 1).$$

Прямая проверка показывает, что полученная формула остается справедливой также при  $n=0$  и  $n=1$ . Таким образом,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},$$

$$n=0, 1, 2, \dots, \alpha > -1. \quad (4.21.2)$$

Формулы (4.21.1—2) играют важную роль в теории разложения функций по полиномам Лагерра (§ 4.23). Из этих формул следует также, что функции

$$\varphi_n(x) = \left\{ \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(x), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную систему на промежутке  $(0, \infty)$ .

#### § 4.22. Асимптотическое представление полиномов Лагерра для больших значений индекса $n$

Полиномы Лагерра  $L_n^{\alpha}(x)$ , так же как другие ортогональные полиномы, допускают простые асимптотические представления при  $n \rightarrow \infty$ .

Для вывода этих формул положим

$$u = e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\alpha}(x) \quad (4.22.1)$$

и заметим, что  $u$  представляет собой интеграл дифференциального уравнения

$$xu'' + (\alpha+1)u' + \left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)u = \frac{xu}{4}, \quad (4.22.2)$$

регулярный в окрестности точки  $x=0$  и удовлетворяющий начальному условию:

$$u(0) = L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)}. \quad (4.22.3)$$

Дальнейший ход рассуждений несколько зависит от того, будет параметр  $\alpha$  положительным или отрицательным, однако это различие не принципиального характера, в связи с чем мы ограничимся только случаем  $\alpha \geq 0$ .

Если рассматривать правую часть уравнения (4.22.2) как заданную функцию, то, применяя метод Лагранжа, находим\*)

$$u(x) = A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \frac{\pi}{4N} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} u(y) [u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)] dy, \quad (4.22.4)$$

где

$$u_1(x) = (\sqrt{Nx})^{-\alpha} J_\alpha(2\sqrt{Nx}); \quad u_2(x) = (\sqrt{Nx})^{-\alpha} Y_\alpha(2\sqrt{Nx});$$

$J_\alpha(x)$ ,  $Y_\alpha(x)$  — функции Бесселя первого и второго рода,  $N = n + \frac{1}{2}(\alpha + 1)$ .

Принимая во внимание асимптотическое поведение функции Бесселя (5.16.1—2), заключаем, что при  $x \rightarrow 0$   $u_1(x) \rightarrow \{\Gamma(1 + \alpha)\}^{-1}$ ,  $u_2(x) \rightarrow \infty$ , а интегральный член есть  $O(x^2)$ \*\*), поэтому значения постоянных интегрирования в (4.22.4) будут

$$A_1 = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, \quad A_2 = 0, \quad (4.22.5)$$

и это равенство может быть записано в виде

$$u(x) = A_1 [u_1(x) + r_n(x)], \quad (4.22.6)$$

где

$$r_n(x) = \frac{\pi}{4A_1 N} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} u(y) [u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)] dy. \quad (4.22.7)$$

Покажем, что при фиксированном  $x \geq 0$  и  $n \rightarrow \infty$  величина остаточного члена в формуле (4.22.6) будет мала по сравнению с первым слагаемым. При доказательстве будем различать два случая: 1°.  $0 \leq x \leq N^{-1}$ ; 2°.  $x > N^{-1}$ , и предварительно установим верхнюю границу модуля  $u(x)$  для интервала  $(0, N^{-1})$ , которую мы обозначим  $M_n$ .

\*)  $(u_1, u_2)$  образуют систему решений однородного уравнения

$$xu'' + (\alpha + 1)u' + \left(n + \frac{\alpha + 1}{2}\right)u = 0,$$

с вронскианом

$$W\{u_1, u_2\} = \frac{N}{\pi} (Nx)^{-\alpha-1}.$$

\*\*) За исключением случая  $\alpha = 0$ , когда этот член есть

$$O\left(x^2 \ln \frac{1}{x}\right).$$

Согласно § 5.16, мы имеем при  $0 \leq x \leq N^{-1}$ :

$$u_1(x) = O(1), \quad u_2(x) = \begin{cases} O(N^{-\alpha} x^{-\alpha}), & \alpha > 0, \\ O(\ln N^{-1} x^{-1}), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (4.22.8)$$

поэтому из (4.22.4—5), в предположении  $\alpha > 0$ , следует

$$|u(x)| \leq A_1 O(1) + M_n N^{-1} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} [O(N^{-\alpha} x^{-\alpha}) + \\ + O(N^{-\alpha} y^{-\alpha})] dy = A_1 O(1) + M_n x^2 O(1) = A_1 O(1) + M_n O(N^{-2}),$$

откуда вытекает, что при больших  $n$

$$M_n = A_1 O(1). \quad (4.22.9)$$

Полученный результат остается справедливым и для  $\alpha = 0$ .

Воспользовавшись (4.22.9), находим, что при  $0 \leq x \leq N^{-1}$ ,  $\alpha > 0$ ,

$$|r_n(x)| \leq x^2 O(1) = O(N^{-2}). \quad (4.22.10)$$

Для тех же значений  $x$  и  $\alpha = 0$  получаем:

$$|r_n(x)| \leq x^2 \ln(N^{-1} x^{-1}) O(1) = O(N^{-2}). \quad (4.22.11)$$

Для оценки  $r_n(x)$  при  $x \geq N^{-1}$  представим (4.22.7) в виде суммы интегралов:

$$r_n(x) = \frac{\pi}{4A_1 N} \left\{ \int_0^{\frac{1}{N}} + \int_{\frac{1}{N}}^x \right\} = J_1 + J_2. \quad (4.22.12)$$

Так как в интервале  $(N^{-1}, \infty)$  в соответствии с § 5.16

$$u_1(x) = O\left(N^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}\right), \\ u_2(x) = O\left(N^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}\right), \quad (4.22.13)$$

то, так же как и выше, имеем при  $\alpha > 0$ :

$$|J_1| \leq N^{-1} \int_0^{\frac{1}{N}} (Ny)^{\alpha+1} (Nx)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} [O(1) + O(N^{-\alpha} y^{-\alpha})] dy = \\ = N^{-2} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}\right). \quad (4.22.14)$$

Оценка справедлива и в том случае, когда  $\alpha = 0$ .



Далее мы имеем

$$|J_2| \leq (A_1 N)^{-1} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} |u(y)| (Ny)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} dy \leq \\ \leq A_1^{-1} N^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \int_0^x y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} |u(y)| dy.$$

На основании неравенства Буняковского — Шварца и формулы (4.21.2) находим

$$\int_0^x y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} |u(y)| dy \leq \left\{ \int_0^x y^{\alpha+\frac{3}{2}} dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^\infty u^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = A_1^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} \left(\alpha + \frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

поэтому

$$|J_2| \leq A_1^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

или, так как, согласно (4.22.5),  $A_1 = O(N^\alpha)$ ,

$$|J_2| \leq N^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \quad (4.22.15)$$

Из (4.22.12), (4.22.14) и (4.22.15) получаем, что при  $x \geq N^{-1}$

$$|r_n(x)| \leq O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \left[N^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} + N^{-2} O(1)\right]. \quad (4.22.16)$$

Сравнение (4.22.8) с (4.22.10—11) и (4.22.13) с (4.22.16) показывает, что для всех  $0 \leq x \leq a$  ( $a$  — произвольное конечное число) величина остаточного члена в (4.22.6) будет мала по сравнению с  $u_1(x)$ , поэтому имеет место асимптотическая формула

$$u(x) \approx_{n \rightarrow \infty} A_1 u_1(x). \quad (4.22.17)$$

или

$$L_n^\alpha(x) \approx_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} e^{\frac{x}{2}} (Nx)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{Nx}), \quad N = n + \frac{\alpha+1}{2}. \quad (4.22.18)$$

Для интервала  $0 < \delta \leq x \leq a$  можно заменить функцию Бесселя ее асимптотическим представлением (5.16.1) и преобразовать полученную формулу к более простому виду:

$$L_n^\alpha(x) \approx_{n \rightarrow \infty} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{Nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.22.19)$$

### § 4.23. Разложение функций в ряды по полиномам Лагерра

К числу наиболее важных свойств полиномов Лагерра относится возможность представления произвольной функции  $f(x)$ , определенной на промежутке  $(0, \infty)$  и удовлетворяющей некоторым условиям, рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (4.23.1)$$

где, в соответствии с формулами (4.21.1—2), коэффициенты определяются при помощи равенств:

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx. \quad (4.23.2)$$

Для обоснования справедливости разложения достаточно предположить кусочную гладкость функции  $f(x)$  в открытом интервале  $(0, a)$  и наложить некоторые ограничения на поведение функции в окрестности точек  $x=0$  и  $x=\infty$ . В частности имеет место следующая теорема:

**Теорема 3.** Пусть  $f(x)$  — произвольная функция, определенная на промежутке  $(0, \infty)$  и удовлетворяющая условиям:

- 1°.  $f(x)$  — кусочно-гладкая функция во всяком открытом интервале  $(0, a)$ ;
- 2°. интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha f^2(x) dx$$

имеет конечное значение.

Тогда ряд (4.23.1) с коэффициентами (4.23.2) сходится и его сумма равна  $f(x)$  в каждой точке  $x$ , где эта функция непрерывна.

В точке разрыва ряд сходится к  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ .

Доказательство теоремы может быть дано с помощью методов, аналогичных использованным при доказательстве соответствующей теоремы разложения для полиномов Эрмита (§ 4.15)\*.

\*) См. Успенский И. В. [1]. Для случая  $\alpha > -\frac{1}{2}$  условие, наложенное Успенским на поведение функции вблизи точки  $x=0$ , носит несколько менее ограничительный характер.

Доказательство теоремы разложения при других условиях, наложенных на  $f(x)$ , можно найти в работах Корауса [1] и Сеге [1].

### § 4.24. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Лагерра

Определение коэффициентов разложения в ряды по полиномам Лагерра требует вычисления интегралов вида (4.23.2). Методы, применяемые для этой цели, состоят большей частью в замене полинома  $L_n^\alpha(x)$  его явным выражением (4.17.1) или интегральным представлением (4.19.3). Во многих случаях оказывается полезным также метод, основанный на использовании производящей функции (4.17.3).

Техника разложения иллюстрируется следующими примерами.

Пример 1. Пусть  $f(x) = x^\nu$ .

Если  $\nu > -\frac{1}{2}(1 + \alpha)$ , условия теоремы 3 будут выполнены, и мы имеем\*)

$$x^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha + \nu} L_n^\alpha(x) dx.$$

Подставляя выражение для  $L_n^\alpha(x)$  из формулы (4.17.1) интегрируя  $n$  раз по частям, находим

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty x^\nu (e^{-x} x^{n + \alpha})^{(n)} dx = \\ &= \frac{(-1)^n \nu(\nu - 1) \dots (\nu - n + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha + \nu} dx = \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(\nu + \alpha + 1) \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(\nu - n + 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x^\nu = \Gamma(\nu + \alpha + 1) \Gamma(\nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(\nu - n + 1)}, \quad (4.24.1)$$

$$0 < x < \infty; \quad \alpha > -1.$$

\*) Заметим, что условия, которые налагаются на параметры в примерах 1—4, являются достаточными, но полученные разложения могут оставаться справедливыми в более широкой области,

В частности, если  $\nu$  — целое положительное число, ряд (4.24.1) обрывается на конечном числе членов и мы получим

$$x^p = \Gamma(p + \alpha + 1) p! \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n + \alpha + 1) (p - n)!}, \quad (4.24.2)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad \alpha > -1.$$

Пример 2.  $f(x) = e^{-ax}$ .

Условия теоремы выполняются при  $a > -\frac{1}{2}$ .

Полагая

$$e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-ax} (e^{-x} x^{n+\alpha})^{(n)} dx = \\ &= \frac{a^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x} x^{n+\alpha} dx = \frac{a^n}{(a+1)^{n+\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Подставляя найденное значение  $c_n$ , получаем

$$e^{-ax} = (a+1)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (4.24.3)$$

Другой способ вывода формулы (4.24.3) заключается в замене  $t = \frac{a}{a+1}$  в разложении производящей функции (4.17.3).

Пример 3.  $f(x) = (xa)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xa})$  ( $x > 0$ ,  $a > 0$ ;  $\alpha > -1$ ).  
В данном случае искомое разложение имеет вид

$$(xa)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xa}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

где

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xa}) e^{-x} L_n^\alpha(x) dx.$$

Для вычисления интеграла умножим равенство (4.17.3) на  $\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha J_\alpha(2\sqrt{xa})e^{-x}$  и проинтегрируем по  $x$  в промежутке  $(0, \infty)$ . Тогда предполагая, что  $|t|$  достаточно мало, получим

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{1-t}} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xa}) dx &= e^{-a(1-t)} = \\ &= e^{-a} \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^\infty t^n \int_0^\infty \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha J_\alpha(2\sqrt{xa}) e^{-x} L_n^\alpha(x) dx. \end{aligned}$$

В процессе вычисления мы воспользовались формулой (5.15.2). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , находим

$$c_n = \frac{e^{-a} a^n}{\Gamma(n+\alpha+1)},$$

откуда

$$(xa)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xa}) = e^{-a} \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x), \quad (4.24.4)$$

$$x > 0, \quad a > 0; \quad \alpha > -1.$$

Пример 4. Если умножить равенство (4.24.3) на  $(a+1)^{\alpha-1}$  и проинтегрировать по  $a$  в промежутке  $(0, \infty)$ , то получим

$$\int_0^\infty e^{-ax} (a+1)^{\alpha-1} da = \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x) \int_0^\infty \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \frac{da}{(a+1)^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n^\alpha(x)}{n+1}.$$

Интеграл в левой части равенства может быть выражен через неполную гамма-функцию (см. стр. 29, пример 10). Мы имеем

$$e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n^\alpha(x)}{n+1}, \quad 0 < x < \infty; \quad \alpha > -1. \quad (4.24.5)$$

Частным случаем этого разложения является формула

$$-e^x \text{Ei}(-x) \equiv e^x \Gamma(0, x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)}{n+1}, \quad 0 < x < \infty. \quad (4.24.6)$$

Разложения некоторых других функций в ряды по полиномам Лагерра приведены в конце главы (стр. 125, примеры 19–20).

### § 4.25. Приложение к теории распространения электромагнитных волн вдоль длинных линий.

#### Отражение от конца линии, замкнутой на сосредоточенную индуктивность

В качестве любопытного примера приложения полиномов Лагерра к техническим проблемам рассмотрим задачу о распространении электромагнитных волн вдоль линии передачи, один конец которой в момент  $t=0$  подключается к источнику с постоянной э. д. с.  $E$ , а другой замкнут на катушку самоиндукции  $L_0$  (рис. 12).

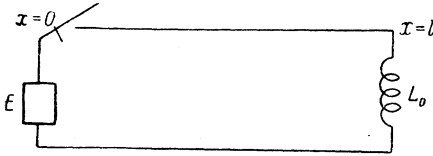


Рис. 12.

Если обозначить через  $\varphi = \varphi(x, t)$ ,  $i = i(x, t)$ , мгновенные значения напряжения и тока,  $L$  и  $C$  — самоиндукцию

и емкость на единицу длины линии, то рассматриваемая задача сводится к интегрированию системы линейных уравнений

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.25.1)$$

при начальных условиях

$$\varphi|_{t=0} = i|_{t=0} = 0 \quad (4.25.2)$$

и граничных условиях:

$$\varphi|_{x=0} = E, \quad \varphi|_{x=l} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_{x=l}. \quad (4.25.3)$$

Эффективный метод решения этих уравнений заключается в применении к ним преобразования Лапласа (§ 2.6), в результате которого рассматриваемые уравнения переводятся в обыкновенные дифференциальные уравнения для функций  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{i}$ , где  $\bar{f}$  обозначает преобразование Лапласа от функции  $f$ :

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f e^{-pt} dt. \quad (4.25.4)$$

Если исключить  $\bar{i}$ , то для определения  $\bar{\varphi}$  получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx^2} - LCp^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (4.25.5)$$

с граничными условиями

$$\bar{\varphi}|_{x=0} = \frac{E}{p}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dx} + \frac{L}{L_0} \bar{\varphi} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4.25.6)$$

откуда следует

$$\bar{\varphi} = \frac{\operatorname{ch} \frac{p}{v} (l-x) + \frac{Z}{L_0 p} \operatorname{sh} \frac{p}{v} (l-x)}{\operatorname{ch} \frac{p}{v} l + \frac{Z}{L_0 p} \operatorname{sh} \frac{p}{v} l} \frac{E}{p}, \quad (4.25.7)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — скорость распространения волн вдоль линии,  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$  — волновое сопротивление.

Переход к первичной функции  $\varphi$  может быть совершен с помощью формулы обращения

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\varphi} e^{pt} dp, \quad (4.25.8)$$

где интегрирование производится вдоль прямой  $(L)$ , параллельной мнимой оси и выбранной таким образом, чтобы особые точки  $\bar{\varphi}$  лежали слева от нее.

В дальнейшем нас будет интересовать значение напряжения на конце линии, в соответствии с чем положим в формулах (4.25.7—8)  $x = l$ . Мы находим тогда

$$\frac{(\varphi)_{x=l}}{E} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{e^{pt}}{p \operatorname{ch} pT + \alpha \operatorname{sh} pT} dp, \quad (4.25.9)$$

где  $T = \frac{l}{v}$  — время пробега волны от одного конца линии до другого,  $\alpha = \frac{Z}{L_0}$ .

Для того чтобы получить решение задачи в форме, допускающей простую физическую интерпретацию, разложим  $(\bar{\varphi})_{x=l}$  по степеням  $e^{-2pT}$  и проинтегрируем почленно. Мы имеем тогда

$$\frac{(\varphi)_{x=l}}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left( \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \right)^n \frac{e^{p[t-(2n+1)T]}}{p+\alpha} dp,$$

или, если ввести новое переменное интегрирования  $q = \frac{p+\alpha}{2\alpha}$ ,

$$\frac{(\varphi)_{x=l}}{2E} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha[t-(2n+1)T]} \frac{1}{2\pi i} \int_{(L')} \left( 1 - \frac{1}{q} \right)^n e^{2q\alpha[t-(2n+1)T]} \frac{dq}{q}, \quad (4.25.10)$$

где  $(L')$  — прямая, параллельная  $(L)$ .

Вычисление интеграла

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L')} \left( 1 - \frac{1}{q} \right)^n \frac{e^{q\tau}}{q} dq \quad (4.25.11)$$

может быть произведено с помощью теории вычетов, если дополнить контур до замкнутого дугой круга произвольно большого радиуса, расположенной слева от  $(L')$ , если  $\tau > 0$ , и справа от нее, если  $\tau < 0$ .

В первом случае значение интеграла будет

$$F(\tau) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{dq^n} (q-1)^n e^{q\tau} \right]_{q=0} = \frac{e^\tau}{n!} \left[ \frac{d^n}{dy^n} y^n e^{-y} \right]_{y=\tau} = L_n(\tau), \quad (4.25.12)$$

где  $L_n(\tau)$  — полином Лагерра  $n$ -го порядка (§ 4.17); во втором — это значение равно нулю.

Воспользовавшись полученным результатом, находим  $(\varphi)_{x=l} = 0$  при  $0 \leq t < T$  и

$$\frac{(\varphi)_{x=l}}{2E} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{-\alpha [t - (2n+1)T]} L_n \{2\alpha [t - (2n+1)T]\} \quad (4.25.13)$$

для

$$(2N-1)T < t < (2N+1)T, \quad N = 1, 2, \dots$$

Решение представляется в замкнутой форме; добавление новых слагаемых в сумму (4.25.13), происходящее через интервалы  $2T$ , соответствует приходу в точку  $x=l$  отраженных волн.

Метод применим для других типов нагрузки линии, причем во многих случаях решение также выражается через полиномы Лагерра.

## § 4.26. Сведения о таблицах ортогональных полиномов

Из ортогональных полиномов лучше других табулированы полиномы Лежандра, для которых мы можем указать следующие таблицы:

1. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$\begin{array}{llll} P_n(x), & x = 0(0,01)1, & n = 1(1)7, & 4 \text{ дес. зн.} \\ P_n(\cos \theta), & \theta = 0(1^\circ)90^\circ, & n = 1(1)10, & 5 \text{ дес. зн.} \end{array}$$

2. Шпильрейн Я. Н., тит. ред., Таблицы специальных функций, ГТТИ, 1934:

$$\left. \begin{array}{ll} P_n(x) & x = 0(0,01)1, \\ P_n(\cos \theta), & \theta = 0(1^\circ)90^\circ, \end{array} \right\} n = 1(1)7, \quad 4 \text{ дес. зн.}$$

3. Хайяши (Hayashi K.), Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin, 1930:

$$\left. \begin{array}{ll} P_n(x), & x = 0(0,01)1, \\ P_n(\cos \theta), & \theta = 0(1^\circ)90^\circ, \end{array} \right\} n = 1(1)10, \quad 5 \text{ дес. зн.}$$



4. British Association Mathematical Tables, Legendre Polynomials, Cambridge, 1946:

$$P_n(x), \quad \left. \begin{array}{l} x=0(0,01)6, \quad n=1(1)12, \\ x=6(0,1)11, \quad n=1(1)6, \end{array} \right\} 7-8 \text{ дес. зн.}$$

5. Толквист (Tallqvist H.), Acta Societatis Scientiarum Fennicae, (A), 2, № 11, 1938:

$$P_n(x), \quad x=0(0,001)1, \quad n=1(1)16, \quad 6 \text{ дес. зн.}$$

Значения полиномов Эрмита приведены в таблицах:

6. Митропольский А. К., Интеграл вероятностей. Изд. Лесотехн. акад. им. Кирова, Л., 1948:

$$H_n(x), \quad x=0(0,01)4, \quad n=2, 3, 4, \quad 4-8 \text{ дес. зн.}$$

7. Рассел (Russell J. B.), J. Math. and Physics, 12, 291—297, 1933:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad x=0(0,04)1(0,1)4(0,2)7(0,5)8, \quad n=0(1)11, \quad 5 \text{ зн. ц.}$$

8. British Association Mathematical Tables, vol. 1, Cambridge, 1946:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{(\sqrt{2})^n}, \quad x=-7(0,1)6,6; \quad n=0(1)6.$$

Полиномы Лагерра в настоящее время табулированы лишь для простейшего случая  $a=0$ . Из таблиц, относящихся к этому случаю, могут быть упомянуты следующие:

9. Слэтер (Slater L.), Proc. of the Inst. of Electrical Eng., (C), 103, 46—50, London, 1956:

$$L_n(x), \quad x=0(0,1)5, \quad n=0(1)10, \quad 5-6 \text{ дес. зн.}$$

10. Трикоми (Tricomi F.), Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 1955—56, 90, 63—70:

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x), \quad x=0,1(0,1)1(0,25)6(1)14(2)34, \quad n=0(1)10, \quad 6 \text{ зн. ц.}$$

11. Хэд, Вилсон (Head J., Wilson W.), Proc. of the Inst. of Electrical Engineers, (C), 103, 428—440, London, 1956:

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x), \quad x=0(0,1)1(0,2)3(0,5)6(1)14(2)40(5)100, \quad n=0(1)20, \\ 4 \text{ дес. зн.}$$

Дополнительные сведения о таблицах ортогональных полиномов можно найти в справочниках А. В. Лебедева и Р. М. Федоровой [1]; Н. М. Буруновой [1]; Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

Следует заметить, что существующие таблицы полиномов Эрмита и Лагерра не обеспечивают полностью практических потребностей, в связи с чем задача дальнейшего табулирования этих функций является весьма актуальной.

### Упражнения

1. Показать, что все корни уравнения  $P_n(x) = 0$  вещественны и лежат в интервале  $(-1, 1)$ .

Указание. Применить теорему Ролля.

2. Показать, что все корни уравнения  $H_n(x) = 0$  вещественны.

3. Доказать неравенство

$$|P_n(x)| < \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} (1-x^2)^{-1/4}, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Указание. Простое доказательство приведено в книге Сеге [1].

4. Основываясь на равенствах (4.9.2) и (4.17.2), доказать формулу Успенского

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) (2n)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(t\sqrt{x}) dt, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

дающую выражение полиномов Лагерра через полиномы Эрмита.

5. Доказать формулу Кошлякова [1]

$$L_n^{\alpha+\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta) \Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\beta-1} L_n^\alpha(xt) dt,$$

$$\alpha > -1; \quad \beta > 0.$$

Указание. Заменить полином Лагерра  $L_n^\alpha(xt)$  его разложением (4.17.2) и проинтегрировать почленно.

При  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$  полученная формула переходит в формулу Успенского.

6. Вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_n^2(x) dx$$

во многих случаях может быть выполнено при помощи следующего приема: умножим (4.9.6) на  $f(x)$ , проинтегрируем по промежутку  $(-\infty, \infty)$  и вычислим значение интеграла в правой части равенства  $\varphi(t)$ ; разложим  $\varphi(t)$  в степенной ряд и сравним коэффициенты при одинаковых степенях  $t$

в обеих частях рассматриваемого равенства. Применяя этот метод, показать, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx &= 2^n n! \sqrt{\pi}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) x^2 dx &= 2^n n! \sqrt{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_n^2(x) dx &= 2^{n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

7. Показать, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} H_{2n}(x) dx &= \frac{(2n)!}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)^n, \\ n &= 0, 1, 2, \dots; R(a^2) > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_p^2(x) H_{2n}(x) dx &= \frac{2^{p+n} (2n)! (p!)^2 \sqrt{\pi}}{(p-n)! (n!)^2}, \\ p &= 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Указание. При выводе второй формулы воспользоваться методом примера 6.

8. Доказать, что

$$\frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Указание. Применить метод примера 6.

Данная формула находит применение при выводе теоремы разложения в ряды по полиномам Эрмита (§ 4.15).

9. Получить интегральное представление

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) = \frac{1}{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t) \cos(\sqrt{2x}t) dt.$$

Указание. Применить для вычисления интеграла в правой части метод примера 6.

10. Получить формулу

$$e^{-x^2} H_n^2(x) = \frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} L_n\left(\frac{s^2}{2}\right) \cos sx ds.$$

Указание. Воспользоваться результатом примера 9 и теоремой обращения Фурье.

11. Получить интегральное уравнение для квадратов полиномов Эрмита с нечетным индексом

$$\frac{e^{-x} H_{2n+1}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} J_1(2\sqrt{xy}) \frac{e^{-y} H_{2n+1}^2(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy.$$

У к а з а н и е. Использовать для вычисления интеграла в правой части метод примера 6.

12. Получить интегральное уравнение для квадратов полиномов Лагерра

$$e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2 = \int_0^{\infty} J_{2\alpha}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\alpha} [L_n^{\alpha}(y)]^2 dy, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

частным случаем которого является уравнение примера 11.

13. Доказать равенства

$$e^{t^2} \cos 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{(2n)!} t^n, \quad |t| < \infty,$$

$$e^{t^2} \sin 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} t^n,$$

Выражения в левых частях данных равенств можно рассматривать как производящие функции для четных и нечетных полиномов Эрмита.

14. Получить следующие разложения по полиномам Эрмита

$$e^{x^2} [1 - \Phi^2(x)] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{2^{3n+\frac{1}{2}} n!} \frac{H_{2n+1}(x)}{2n+1},$$

$$F(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+3} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} H_{2n+1}(x).$$

15. Получить разложение квадрата полинома Эрмита по полиномам Эрмита

$$H_p^2(x) = 2^p (p!)^2 \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n}(x)}{2^n (n!)^2 (p-n)!}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

У к а з а н и е. Воспользоваться результатом примера 7.

16. Получить разложение произведения полиномов Эрмита с разными индексами по полиномам Эрмита

$$H_p(x) H_{p+r}(x) = 2^p p! (p+r)! \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n+r}(x)}{2^n n! (n+r)! (p-n)!},$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Указание. Для  $r=1$  требуемый результат получится дифференцированием формулы примера 15. В общем случае можно воспользоваться методом индукции. Найденное разложение может быть записано в симметричной форме

$$H_p(x) H_q(x) = p! q! \sum_{n=0}^{\min(p, q)} \frac{2^n H_{p+q-2n}(x)}{n! (p-n)! (q-n)!},$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

17. С помощью производящей функции (4.9.3) получить теорему сложения для полиномов Эрмита

$$H_p(x \cos \alpha + y \sin \alpha) = p! \sum_{n=0}^p \frac{H_n(x) H_{p-n}(y)}{n! (p-n)!} \cos^n \alpha \sin^{p-n} \alpha.$$

18. Доказать формулу

$$L_p(x^2 + y^2) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n}(x) H_{2p-2n}(y)}{n! (p-n)!}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Указание. Воспользоваться разложением (4.17.3).

19. Получить разложение неполной гамма-функции  $\gamma(\alpha, x)$  по полиномам Лагерра

$$x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{2^{n+\alpha} (n+\alpha)}, \quad 0 < x < \infty, \alpha > 0.$$

20. Вывести формулы:

$$L_p^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{n=0}^p L_n^\alpha(x) L_{p-n}^\beta(y),$$

$$L_p^\beta(x) = \sum_{n=0}^p \frac{(\beta-\alpha)_{p-n}}{(p-n)!} L_n^\alpha(x),$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

Указание. Воспользоваться производящей функцией (4.17.3).

21. Полиномы Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  определяются при помощи формулы

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Применяя методы настоящей главы, показать, что полиномы Якоби обладают следующими свойствами:

1) функция  $u = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) u'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] u' + n(n + \alpha + \beta + 1) u = 0;$$

2) полиномы Якоби образуют ортогональную систему функций на промежутке  $(-1, 1)$  с весом  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ;

3) полиномы Якоби являются коэффициентами разложения производящей функции

$$w(x, t) = 2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1-t+R)^{-\alpha} (1+t+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n, \quad |t| < r,$$

где  $R = (1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $r$  — меньший из модулей корней квадратного уравнения  $1 - 2xt + t^2 = 0$ .

Более подробные сведения по теории данного класса полиномов можно найти в монографиях Сеге [1] и Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], т. 2, гл. X.

22. Полиномы Чебышева  $T_n(x)$  определяются при помощи равенства

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказать, что

1) функция  $u = T_n(x)$  есть частное решение уравнения

$$(1-x^2)u'' - xu' + n^2u = 0;$$

2) полиномы Чебышева ортогональны на промежутке  $(-1, 1)$  с весом

$$p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$3) \quad w(x, t) = \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n, \quad |t| < r$$

( $r$  имеет то же значение, что и в примере 21).

Полиномы Чебышева играют важную роль в теории аппроксимации функций.

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IV

Смирнов В. И. [1]; Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. [1]; Курант и Гильберт [1]; Джексон [1]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1]; Сансоне [1]; Сеге [1]; Уиттекер и Ватсон [1].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

Подробная библиография по ортогональным полиномам приведена в работе Шохата, Хилла и Уолша [1].

## ГЛАВА V

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

#### § 5.1. Введение

Цилиндрическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.1.1)$$

где  $z$  — комплексное переменное,  $\nu$  — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Термин „цилиндрические функции“ обязан своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение (5.1.1) встречается при рассмотрении крайних задач теории потенциала для цилиндрической области (§ 6.3).

Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе под названием функций Бесселя, и иногда это наименование присваивается всему классу цилиндрических функций.

Хорошо разработанная теория рассматриваемых функций, наличие подробных таблиц и широкая область применений служат достаточным основанием для того, чтобы отнести цилиндрические функции к числу наиболее важных специальных функций. Приложения цилиндрических функций к физике, технике и анализу носят весьма разнообразный характер — от абстрактных проблем теории чисел и теоретической астрономии до конкретных задач математической физики и техники. Некоторые из этих приложений, взятые преимущественно из области математической физики, приведены в гл. VI.

Настоящая глава содержит краткое изложение основ теории цилиндрических функций, более подробные сведения о которых читатель может найти в специальных сочинениях, посвященных этим функциям, в частности в известной монографии Ватсона [1] и других работах, указанных в конце главы.

### § 5.2. Функции Бесселя с целым положительным значком

Для рассмотрения многих проблем, связанных с применением цилиндрических функций, достаточно ограничиться изучением специального класса этих функций, который соответствует случаю, когда параметр  $\nu$  в уравнении (5.1.1) равен нулю или целому положительному числу.

Исследование данного класса носит более элементарный характер, чем теория, относящаяся к произвольным значениям  $\nu$ , и может служить хорошим введением в эту общую теорию.

Покажем, что одним из решений уравнения

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) u = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.2.1)$$

является функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $u_1 = J_n(z)$ , которая для любых значений  $z$  определяется как сумма ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!}, \quad |z| < \infty. \quad (5.2.2)$$

При помощи признака Даламбера легко убедиться, что рассматриваемый ряд сходится на всей плоскости комплексного переменного и, следовательно, представляет целую функцию от  $z$ .

Если обозначить левую часть уравнения (5.2.1) через  $l(u)$  и ввести сокращенную запись коэффициентов ряда (5.2.2), положив

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k! (n+k)!},$$

то в результате подстановки получим

$$\begin{aligned} l(u_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k-2} \{ (n+2k)(n+2k-1) + \\ &\quad + (n+2k) - n^2 \} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 4\alpha_k z^{n+2k-2} k(n+k) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{n+2k} \{ 4\alpha_{k+1} (k+1)(n+k+1) + \alpha_k \}, \end{aligned}$$

откуда следует  $l(u_1) \equiv 0$ , так как выражение в фигурных скобках равно нулю. Таким образом, функция  $J_n(z)$  удовлетворяет уравнению (5.2.1), т. е. представляет собой цилиндрическую функцию.



Простейшими функциями рассматриваемого класса являются функции Бесселя порядка нуль и единица:

$$\left. \begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!^2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{3!^2} + \dots, \\ J_1(z) &= \frac{z}{2} \left[ 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!2!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!3!} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{3!4!} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.3)$$

Покажем, что функции Бесселя других порядков могут быть выражены через эти две функции. Для доказательства предположим, что  $n$  — целое положительное число, умножим ряд (5.2.2) на  $z^n$  и продифференцируем по  $z$ . Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n J_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+2k)}{2^{n+2k} k! (n+k)!} z^{2n+2k-1} = \\ &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n-1+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1+2k} = z^n J_{n-1}(z), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dz} z^n J_n(z) = z^n J_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.4)$$

Аналогичным образом, умножая ряд на  $z^{-n}$ , находим

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.5)$$

Выполнив дифференцирование в равенствах (5.2.4—5) и разделив на множитель  $z^{\pm n}$ , приходим к формулам:

$$J'_n(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z), \quad J'_n(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z), \quad (5.2.6)$$

откуда непосредственно следует:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.7)$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.8)$$

Полученные формулы известны под названием рекуррентных соотношений для функций Бесселя.

Первое из соотношений дает возможность выразить функцию произвольного порядка  $n$  через функции порядков нуль и единица, что существенным образом сокращает работу по составлению таблиц функций Бесселя.

Второе соотношение позволяет представить производные от функций Бесселя через функции Бесселя. Для  $n=0$  это соотношение должно быть заменено формулой

$$J'_0(z) = -J_1(z), \quad (5.2.9)$$

непосредственно вытекающей из определения данных функций.

Функции Бесселя первого рода  $J_n(z)$  просто связаны с коэффициентами разложения функции  $w(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})}$  в ряд Лорана\*):

$$w(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z) t^n, \quad 0 < |t| < \infty. \quad (5.2.10)$$

Коэффициенты этого разложения могут быть вычислены путем перемножения степенных рядов:

$$e^{\frac{zt}{2}} = 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)}{1!} t + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2!} t^2 + \dots,$$

$$e^{-\frac{z}{2t}} = 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)}{1!} \frac{1}{t} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2!} \frac{1}{t^2} - \dots$$

и объединения членов, содержащих одинаковые степени  $t$ . Выполнив это, получим:

$$\begin{aligned} c_n(z) &= J_n(z), & n &= 0, 1, 2, \dots; \\ c_n(z) &= (-1)^n J_{-n}(z), & n &= -1, -2, \dots \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

откуда следует, что рассматриваемое разложение может быть записано в виде

$$w(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) [t^n + (-1)^n t^{-n}]. \quad (5.2.12)$$

Функция  $w(z, t)$  называется производящей функцией для функций Бесселя с целым значком; найденное соотношение (5.2.12) играет важную роль в теории этих функций.

Для получения общего интеграла уравнения (5.2.1), дающего выражение произвольной цилиндрической функции с целым значком  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), необходимо построить второе решение уравнения, линейно независимое с  $J_n(z)$ . В качестве такого решения может быть взята функция Бесселя второго рода,  $u_2 = Y_n(z)$ , определение которой будет дано в § 5.4. Исходя из этого определения,

\*)  $w(z, t)$ , рассматриваемая как функция  $t$ , регулярна в кольце  $0 < \delta \leq t \leq A < \infty$ , поэтому разложение указанного вида существует.

нетрудно получить для  $Y_n(z)$  аналитическое выражение в виде ряда (§ 5.5)

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)], \quad (5.2.13)$$

где  $\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$ ,  $\psi(1) = -\gamma$  ( $\gamma$  — постоянная Эйлера) и, в случае  $n=0$ , первую из сумм надлежит положить равной нулю.

Функция  $Y_n(z)$  регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ . Существенная особенность рассматриваемого решения состоит в том, что оно обращается в бесконечность, когда  $z \rightarrow 0$ . Общее выражение цилиндрической функции для  $\nu = n$  представляет линейную комбинацию построенных решений

$$u = Z_n(z) = AJ_n(z) + BY_n(z), \quad (5.2.14)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные,  $n = 0, 1, 2, \dots$

### § 5.3. Функции Бесселя с произвольным значком

Функции Бесселя, рассмотренные в § 5.2, составляют частный случай цилиндрических функций более общего вида, известных под названием функций Бесселя первого рода с произвольным значком  $\nu$ . Чтобы определить эти функции, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$

где  $z$  — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ ,  $\nu$  — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения\*).

Легко видеть, что данный ряд сходится при любых  $z$  и  $\nu$ , причем в области  $|z| < R$ ,  $|\nu| < N$  ( $R, N$  — произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных.

\*) Ограничение, наложенное на  $z$ , необходимо для однозначности функции  $z^\nu$  и может быть отброшено, если  $\nu$  — целое число.

Действительно, начиная с достаточного большого  $k$ , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему, равное на основании (1.2.1) величине

$$\frac{|z|^2}{4(k+1)|k+1+\nu|} \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби  $q$ , не зависящей от  $z$  и  $\nu$ . Отсюда, согласно известному признаку сходимости, следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области\*).

Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , сумма ряда определяет некоторую функцию комплексного переменного  $z$ , регулярную в рассматриваемой разрезанной плоскости. Эта функция называется функцией Бесселя первого рода с индексом  $\nu$  и обозначается символом  $J_\nu(z)$ . Таким образом,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi. \quad (5.3.1)$$

Нетрудно показать, что определенная таким образом функция есть частное решение уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0. \quad (5.3.2)$$

Действительно, обозначая левую часть этого уравнения  $l(u)$  и полагая  $u_1 = J_\nu(z)$ , мы находим\*\*), так же как в § 5.2,

$$l(u_1) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\nu+2k} [4\alpha_{k+1}(k+1)(\nu+k+1) + \alpha_k],$$

где  $\alpha_k$  — коэффициенты ряда (5.3.1),

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} \Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$

откуда, на основании (1.2.1) следует, что  $l(u_1) \equiv 0$ .

\*) Функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$  сходится равномерно в области  $(D)$ ,

если для всякого  $z$ , принадлежащего  $(D)$  и  $k \geq m$ , выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{k+1}(z)}{u_k(z)} \right| \leq q < 1,$$

где  $q$  не зависит от  $z$ .

\*\*) Равномерно сходящийся ряд регулярных функций можно дифференцировать почленно.

Так как при фиксированном  $z$ , принадлежащем плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  члены ряда (5.3.1) представляют собой целые функции переменного  $\nu$  (§ 1.1), то из равномерной сходимости по отношению к этому переменному вытекает, что функция Бесселя первого рода, рассматриваемая как функция своего значка, есть целая функция  $\nu$ . При целом  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $\Gamma(k + \nu + 1) = (n + k)!$  и ряд (5.3.1) переходит в ряд (5.2.2), поэтому функции, определенные в настоящем параграфе, являясь обобщением функций Бесселя с целым положительным значком, изученных в § 5.2. При  $\nu$  равном целому отрицательному числу  $\nu = -n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), первые  $n$  членов ряда (5.3.1) обращаются в нуль (§ 1.2), и рассматриваемая формула может быть записана в виде

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}}{k!(k-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s}}{(s+n)!s!},$$

откуда следует

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.3)$$

Таким образом, функции Бесселя с отрицательным целым значком отличаются от соответствующих функций с положительным значком только постоянным множителем.

Полученное соотношение вместе с формулами (5.2.10—11) показывает, что разложение (5.2.12) может быть записано в виде

$$w(z, t) = e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \quad 0 < |t| < \infty. \quad (5.3.4)$$

Многие равенства, установленные ранее для функций Бесселя с целым положительным значком, переносятся на функции с произвольным индексом без каких-либо изменений. Так, например, имеют место соотношения:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z), \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z), \quad (5.3.5)$$

$$\frac{d}{dz} z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz} z^{-\nu} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (5.3.6)$$

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z),$$

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m z^{-\nu} J_{\nu}(z) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z), \quad (5.3.7)$$

представляющие собой обобщение соответствующих формул § 5.2. Доказательство формул (5.3.5—6) повторяет рассуждения этого параграфа и поэтому не приводится. Формулы (5.3.7) получаются путем повторного применения равенств (5.3.6).

### § 5.4. Общее представление цилиндрических функций. Функции Бесселя второго рода

По определению цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка (§ 5.1)

$$l(u) = u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.4.1)$$

поэтому общее ее выражение содержится в форме

$$u = Z_\nu(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z), \quad (5.4.2)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — какие-либо линейно независимые решения рассматриваемого уравнения,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра  $\nu$ . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда  $\nu$  отлично от целого числа. Действительно, выбрав  $u_1 = J_\nu(z)$ , где  $J_\nu(z)$  — функция Бесселя, определенная в § 5.3, мы можем взять в качестве  $u_2$  функцию  $u_2 = J_{-\nu}(z)$ , которая также является решением уравнения (5.4.1), так как последнее не меняется при замене  $\nu$  на  $-\nu$ .

Если  $\nu$  не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при  $z \rightarrow 0$  будет

$$u_1 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, \quad u_2 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad (5.4.3)$$

поэтому эти решения линейно независимы между собой\*) и искомое выражение для цилиндрической функции может быть дано в виде

$$u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z), \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.4.4)$$

Если  $\nu$  — целое число, то, в силу соотношения (5.3.3), построенные частные решения линейно зависимы между собой и найденное выражение (5.4.4) не является общим интегралом уравнения Бесселя (5.4.1). Чтобы получить представление произвольной цилиндрической функции, пригодное при любых значениях параметра  $\nu$ , введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода  $Y_\nu(z)$ , которую для произвольных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , определим при помощи равенства\*\*)

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}. \quad (5.4.5)$$

\*) При  $\nu$  равном нулю или целому числу это рассуждение теряет силу.

\*\*) В некоторых работах, посвященных теории функций Бесселя, для обозначения этой функции используется вместо  $Y_\nu(z)$  символ  $N_\nu(z)$ .

При  $\nu$  равном целому числу правая часть рассматриваемого выражения приобретает неопределенный вид (5.3.3), и мы условимся понимать под значением функции в этом случае предел

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z). \quad (5.4.6)$$

Так как по доказанному числитель и знаменатель в (5.4.5) суть целые функции  $\nu$ , рассматриваемый предел существует, и может быть вычислен по правилу Лопитала, применение которого дает

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\}. \quad (5.4.7)$$

Из определения функции  $Y_\nu(z)$  следует, что эта функция регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , а при фиксированном  $z$  представляет собой целую функцию параметра  $\nu$ . Докажем теперь, что  $Y_\nu(z)$  удовлетворяет уравнению (5.4.1), следовательно, является цилиндрической функцией. При  $\nu$ , отличном от целого числа, требуемый результат непосредственно вытекает из формулы (5.4.4), поэтому достаточно провести доказательство только для случая  $\nu = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Проще всего воспользоваться для этого принципом аналитического продолжения. Так как  $l(Y_\nu)$  — целая функция  $\nu$ , то из равенства  $l(Y_\nu) \equiv 0$  ( $\nu \neq n$ ) следует  $l(Y_n) \equiv 0$ .

Решения  $u_1 = J_\nu(z)$  и  $u_2 = Y_\nu(z)$  линейно независимы между собой. Для  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  этот результат является следствием линейной независимости решений  $J_\nu(z)$  и  $J_{-\nu}(z)$ . Линейная независимость для  $\nu = n$  ( $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при  $z \rightarrow 0$  [формулы (5.4.3) и (5.5.4)]. Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любых значениях  $\nu$ , будет

$$u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z). \quad (5.4.8)$$

Функции Бесселя второго рода удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, именно:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z), \\ Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) &= 2Y'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu Y_\nu(z) &= z^\nu Y_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} Y_\nu(z) &= -z^{-\nu} Y_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.9)$$

и т. д.

При  $\nu$ , отличном от целого числа, справедливость этих формул вытекает из определения функции Бесселя второго рода и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого  $\nu$  требуемый

результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку  $\nu$ , что позволяет осуществить в соотношениях (5.4.9) предельный переход  $\nu \rightarrow n$ .

Отметим еще формулу

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.4.10)$$

являющуюся следствием (5.4.7) и позволяющую свести вычисление функций с отрицательным целым значком к вычислению функций, индекс которых положителен.

При помощи замены переменных в уравнении (5.4.1) легко получить ряд других дифференциальных уравнений, общий интеграл которых может быть выражен через цилиндрические функции. Наиболее интересные для приложений уравнения этого типа являются различными частными случаями дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-2\alpha}{z} u' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] u &= 0, \\ u'' + \alpha z^{\gamma} u &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.11)$$

общие интегралы которых соответственно будут:

$$u = z^{\alpha} Z_1(\beta z^{\gamma}), \quad u = z^{\frac{1}{2}} Z_1\left(\frac{1}{\gamma+2} z^{1+\frac{\gamma}{2}}\right), \quad (5.4.12)$$

где  $Z_1(z)$  обозначает произвольную цилиндрическую функцию.

### § 5.5. Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значком

Для того чтобы получить разложение в ряд функции  $Y_n(z)$ , достаточно воспользоваться формулой (5.4.7) и вычислить производные по значку  $\nu$ , исходя из разложения (5.3.1), причем, ввиду соотношения (5.4.10), можно ограничиться рассмотрением случая целых положительных  $n = 0, 1, 2, \dots$

Так как ряд (5.3.1), по доказанному, сходится равномерно по отношению к  $\nu$ , мы можем дифференцировать его почленно и получить тогда \*)

$$\left[ \frac{\partial J_{\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right\},$$

\*) Переход к пределу при  $\nu \rightarrow n$  под знаком суммы законен, так как ряд, полученный почленным дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно.



где  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  — логарифмическая производная гамма-функции (§ 1.3).

Аналогично имеем

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right\}.$$

При  $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$  и  $\nu \rightarrow n$   $\Gamma(k-\nu+1) \rightarrow \infty$ ,  $\psi(k-\nu+1) \rightarrow \infty$ , поэтому первые  $n$  членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись известными формулами теории гамма-функции (1.2.2; 1.3.4; 1.2.4), получим для таких  $k$

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} &= \lim_{\nu \rightarrow n} \left\{ \Gamma(\nu-k) \sin \pi(\nu-k) \frac{\psi(\nu-k) + \pi \operatorname{ctg} \pi(\nu-k)}{\pi} \right\} = \\ &= (-1)^{n-k} (n-k-1)!, \quad k=0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ &+ (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(n+p)! p!} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(p+1) \right\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+n}, \end{aligned}$$

где введен новый значок суммирования  $p = k - n$ .

Из формулы (5.4.7) следует, что искомое разложение функции Бесселя второго рода с целым положительным значком имеет вид

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \right. \\ &\left. - \psi(k+n+1) \right\}, \quad n=0, 1, 2, \dots, |\arg z| < \pi, \quad (5.5.1) \end{aligned}$$

где в случае  $n=0$  первую сумму надлежит положить равной нулю.

Значения логарифмической производной гамма-функции могут быть вычислены по формулам (1.3.6–7):

$$\begin{aligned} \psi(1) &= -\gamma, \\ \psi(m+1) &= -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \quad (5.5.2) \end{aligned}$$

где  $\gamma = 0,5772 \dots$  — постоянная Эйлера,  $m = 1, 2, \dots$

Принимая во внимание равенство (5.2.2), мы можем представить разложение (5.5.1) в несколько другом виде, именно:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \{\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\}. \quad (5.5.3)$$

Из (5.5.1) вытекает, что при  $z \rightarrow 0$  справедливы асимптотические формулы

$$Y_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2}, \quad Y_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} - \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.5.4)$$

показывающие, что  $Y_n(z) \rightarrow \infty$ , когда  $z \rightarrow 0$ .

### § 5.6. Функции Бесселя третьего рода

К цилиндрическим функциям относятся также функции Бесселя третьего рода или функции Ханкеля  $H_\nu^{(1)}(z)$  и  $H_\nu^{(2)}(z)$ , которые для произвольного  $\nu$  и  $z$ , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль полуоси  $(-\infty, 0)$ , определяются при помощи формул

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z), \quad (5.6.1)$$

где  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  — функции Бесселя первого и второго рода.

Целесообразность введения этих функций обусловлена тем, что рассматриваемые линейные комбинации из  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$  обладают наиболее простыми асимптотическими разложениями при больших  $z$  (§ 5.11) и часто встречаются в приложениях.

Из определения функций Ханкеля следует, что эти функции представляют собой регулярные функции  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  и целые функции  $\nu$ . Очевидно, что рассматриваемые функции линейно независимы между собой и по отношению к  $J_\nu(z)$ , так что общий интеграл уравнения Бесселя (5.4.1) может быть, наряду с (5.4.8), представлен в одной из следующих форм:

$$u = Z_\nu(z) = A_1 J_\nu(z) + A_2 H_\nu^{(1)}(z) = \\ = B_1 J_\nu(z) + B_2 H_\nu^{(2)}(z) = D_1 H_\nu^{(1)}(z) + D_2 H_\nu^{(2)}(z), \quad (5.6.2)$$

где  $A_1, \dots, D_2$  — произвольные постоянные.

Являясь линейными комбинациями функций  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$ , функции Ханкеля удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и эти функции, например,

$$\left. \begin{aligned} H_{\nu-1}^{(i)}(z) + H_{\nu+1}^{(i)}(z) &= \frac{2\nu}{z} H_\nu^{(i)}(z), \\ H_{\nu-1}^{(i)}(z) - H_{\nu+1}^{(i)}(z) &= 2 \frac{dH_\nu^{(i)}(z)}{dz}, \\ \frac{d}{dz} z^\nu H_\nu^{(i)}(z) &= z^\nu H_{\nu-1}^{(i)}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} H_\nu^{(i)}(z) &= -z^{-\nu} H_{\nu+1}^{(i)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.6.3)$$

и т. д.

Если с помощью (5.4.5) исключить из (5.6.1) функцию Бесселя второго рода, то получим

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(z)}{i \sin \nu\pi}, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \nu\pi}, \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

откуда вытекают важные соотношения:

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z). \quad (5.6.5)$$

## § 5.7. Функции Бесселя много аргумента

С функциями Бесселя тесно связаны две часто встречающиеся в приложениях функции  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$ , которые для  $z$ , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси  $(-\infty, 0)$  и произвольного  $\nu$ , могут быть определены при помощи формул:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad (5.7.1)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}, \quad |\arg z| < \pi, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7.2)$$

и при целом  $\nu = n$ :

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7.3)$$

Повторяя рассуждения § 5.3, получаем, что  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$  представляют собой регулярные функции  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  и целые функции  $\nu$ .

Рассматриваемые функции просто связаны с функциями Бесселя от аргумента  $ze^{\pm \frac{\pi}{2}l}$ .

Действительно, предположим, что  $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $-\frac{\pi}{2} < \arg ze^{\frac{i\pi}{2}} < \pi$  и из (5.3.1) следует

$$J_\nu \left( ze^{\frac{i\pi}{2}} \right) = e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{z}{2} \right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = e^{\frac{i\pi\nu}{2}} I_\nu(z),$$

откуда

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} J_\nu \left( ze^{\frac{i\pi}{2}} \right), \quad (5.7.4)$$

для всех  $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

Аналогично из формулы (5.6.4) получаем для таких же  $z$

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)} \left( ze^{\frac{i\pi}{2}} \right) &= \frac{J_{-\nu} \left( ze^{\frac{i\pi}{2}} \right) - e^{-i\pi\nu} J_\nu \left( ze^{\frac{i\pi}{2}} \right)}{i \sin \pi\nu} = \\ &= \frac{e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} I_{-\nu}(z) - e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} I_\nu(z)}{i \sin \pi\nu} = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} K_\nu(z), \end{aligned}$$

откуда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)} \left( ze^{\frac{i\pi}{2}} \right), \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}. \quad (5.7.5)$$

Для значений  $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$  функции  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$  могут быть выражены через функции Бесселя от аргумента  $ze^{-\frac{i\pi}{2}}$ . Мы имеем

$$I_\nu(z) = e^{\frac{i\pi\nu}{2}} J_\nu \left( ze^{-\frac{i\pi}{2}} \right), \quad K_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)} \left( ze^{-\frac{i\pi}{2}} \right) \quad (5.7.6)$$

для всех  $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ .

На основании полученных соотношений функции  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$  называются функциями Бесселя мнимого аргумента\*). Функция  $K_\nu(z)$  известна в литературе также под названием функции Макдональда.

\*) Это название следует признать не слишком удачным. Более целесообразным является термин „модифицированные функции Бесселя“, принятый некоторыми авторами.

Из выведенных формул непосредственно следует, что рассматриваемые функции представляют собой линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{z} u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.7.7)$$

которое отличается от уравнения Бесселя только знаком одного члена и переходит в него при подстановке  $z = \pm it$ .

Уравнение (5.7.7) часто встречается в математической физике. Общий интеграл этого уравнения при произвольном  $\nu$  может быть записан в виде

$$u = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z). \quad (5.7.8)$$

Функции  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$  удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \\ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= 2I'_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2K'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(z) &= z^\nu I_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) &= -z^\nu K_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} I_\nu(z) &= z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} K_\nu(z) &= -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.7.9)$$

и т. д.

Рекуррентные формулы, содержащие функции  $I_\nu(z)$ , доказываются подстановкой в них ряда (5.7.1). Соответствующие формулы для функций  $K_\nu(z)$  при  $\nu$ , отличном от целого числа, проверяются путем подстановки в них выражения (5.7.2) и использования формул первой группы. Справедливость последних соотношений при целом  $\nu$  следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку.

Укажем еще на две полезные формулы:

$$\left. \begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ K_{-n}(z) &= K_n(z), \end{aligned} \right\} \quad (5.7.10)$$

первая из которых вытекает из (5.7.1), если принять во внимание, что при  $\nu = -n$  первые  $n$  членов разложения обращаются в нуль,

в то время как вторая является прямым следствием определения функции Макдональда (5.7.2).

Разложение функции  $K_n(z)$  при  $n=0, 1, 2, \dots$  может быть получено из (5.7.3) методом § 5.5. Приведем окончательный результат вычисления:

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ + \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k! (k+n)!} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \right. \\ \left. - \psi(k+n+1) \right\}, \quad (5.7.11)$$

$n=0, 1, 2, \dots; \quad |\arg z| < \pi.$

Здесь  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции, значения которой могут быть найдены по формулам (5.5.2). Для случая  $n=0$  первую из сумм надлежит считать равной нулю.

Из (5.7.11) вытекает, что асимптотическое поведение функции  $K_n(z)$  при  $z \rightarrow 0$  определяется формулами

$$K_0(z) \approx \ln \frac{2}{z}; \quad K_n(z) \approx \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (5.7.12)$$

поэтому  $K_n(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow 0$ .

### § 5.8. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа

Специальный класс цилиндрических функций образуют цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа. В рассматриваемом случае цилиндрические функции могут быть выражены через элементарные функции. Чтобы показать это, найдем предварительно значения функций  $J_{\pm \frac{1}{2}}(z)$ , для чего

положим в (5.3.1)  $\nu = \pm \frac{1}{2}$  и воспользуемся для преобразования рядов формулой удвоения гамма-функции (1.2.3).

Мы получим тогда

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \\ = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z \quad (5.8.1)$$

и аналогично

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z. \quad (5.8.2)$$

Возможность выразить функцию Бесселя первого рода с любым полужелым значком через элементарные функции следует теперь из рекуррентной формулы (5.3.5)

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z),$$

пользуясь которой можно последовательно получить:

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{z} J_{\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\sin z}{z} - \cos z \right],$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sin z + \frac{\cos z}{z} \right]$$

и т. д.

Общее выражение для  $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$  через элементарные функции получается из формул (5.3.7). Например, если положить во второй из них  $\nu = \frac{1}{2}$  и воспользоваться результатом (5.8.1), то находим:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{z dz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8.3)$$

Соответствующие формулы для функций Бесселя второго и третьего рода могут быть выведены из найденных соотношений, если воспользоваться выражениями этих функций через функции Бесселя первого рода (5.4.5 и 5.6.4). Например, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\frac{1}{2}}(z) &= -J_{-\frac{1}{2}}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z, \\ H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= -i \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{iz}, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = i \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-iz} \end{aligned} \right\} \quad (5.8.4)$$

и т. д.

В заключение укажем на формулы:

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} z, \quad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} z, \quad K_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}, \quad (5.8.5)$$

вытекающие из определений рассматриваемых функций (5.7.1—2).

Формулы для других полуцелых значений индекса получаются из этих формул с помощью рекуррентных соотношений (5.7.9). Ливиллем доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

### § 5.9. Вронскиан системы решений уравнения Бесселя

Вронскианом системы решений  $(u_1, u_2)$  линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка называется определитель

$$W \{u_1(z), u_2(z)\} = \begin{vmatrix} u_1(z), & u_2(z) \\ u_1'(z), & u_2'(z) \end{vmatrix},$$

где штрих обозначает производную по независимому переменному  $z$ . Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений  $u_1$  и  $u_2$  заключается в требовании, чтобы вронскиан не был тождественно равен нулю.

Мы вычислим вронскиан различных пар решений уравнения Бесселя

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0$$

и получим тем самым ряд полезных в приложениях формул, из которых, в частности, следуют найденные ранее другим способом результаты, относящиеся к вопросу о линейной независимости построенных решений.

Для вычисления вронскиана запишем уравнения для  $u_1$  и  $u_2$  в виде:

$$\frac{d}{dz} z u_1' + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) u_1 = 0, \quad \frac{d}{dz} z u_2' + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) u_2 = 0,$$

умножим первое из этих уравнений на  $u_2$ , второе — на  $u_1$  и вычтем одно из другого. Мы получим тогда

$$\frac{d}{dz} z W \{u_1(z), u_2(z)\} = 0,$$

откуда следует

$$W \{u_1(z), u_2(z)\} = \frac{C}{z},$$

где  $C$  — не зависящая от  $z$  постоянная, значение которой может быть определено, например, из соотношения

$$C = \lim_{z \rightarrow 0} z W \{u_1(z), u_2(z)\}.$$



В частности, выбирая  $u_1 = J_\nu(z)$ ,  $u_2 = J_{-\nu}(z)$ , где  $\nu$  отлично от целого числа, и воспользовавшись разложением (5.3.1) и формулами (1.2.1—2) теории гамма-функции, находим

$$C = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} [1 + O(z^2)] = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi},$$

отсюда следует

$$W \{J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\} = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}. \quad (5.9.1)$$

Справедливость найденной формулы при целом  $\nu$  вытекает из принципа непрерывности, причем в этом случае, как и должно быть,  $W \equiv 0$ .

Вронскиан других пар решений уравнения Бесселя может быть получен таким же образом или выведен из (5.9.1) и соотношений (5.4.5; 5.6.4). При этом мы всегда предполагаем сперва  $\nu$  отличным от целого числа, а затем распространяем найденную формулу на любые значения  $\nu$ , пользуясь принципом непрерывности.

Поступая таким образом, находим:

$$W \{J_\nu(z), Y_\nu(z)\} = \frac{2}{\pi z}, \quad (5.9.2)$$

$$W \{J_\nu(z), H_\nu^{(2)}(z)\} = -\frac{2i}{\pi z}, \quad (5.9.3)$$

$$W \{H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)\} = -\frac{4i}{\pi z} \quad (5.9.4)$$

и т. д.

В заключение укажем на аналогичную формулу для функций Бесселя мнимого аргумента:

$$W \{I_\nu(z), K_\nu(z)\} = -\frac{1}{z}. \quad (5.9.5)$$

## § 5.10. Интегральные представления для цилиндрических функций

Цилиндрические функции допускают простые интегральные представления с помощью определенных или контурных интегралов, содержащих переменное  $z$  как параметр. Из этих формул наибольшей общностью обладают интегральные представления, даваемые контурными интегралами, которые обычно справедливы в более широкой области изменения аргумента  $z$  и индекса  $\nu$ , чем представления в виде определенных интегралов. Последние, однако, наиболее часто встречаются в приложениях, в связи с чем мы ограничимся рассмотрением преимущественно формул этого типа, отсылая

читателя по поводу других интегральных представлений к специальным монографиям по теории функций Бесселя\*).

Одно из наиболее простых интегральных представлений для функций Бесселя принадлежит Пуассону. Это представление можно получить суммированием ряда (5.3.1), если воспользоваться вытекающим из (1.5.6) равенством

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \\ R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad (5.10.1)$$

и после подстановки изменить порядок суммирования и интегрирования. Мы получим тогда

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \\ = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \\ = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt dt, \quad (5.10.2)$$

так как, на основании формулы удвоения гамма-функции (1.2.3),

$$2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2k+1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (2k)!$$

Для строгого обоснования удобно временно предположить, что  $\nu$  — вещественное число, большее чем  $-\frac{1}{2}$ . Тогда замена всех членов под знаком суммы и интеграла их модулями приводит к выражению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \equiv I_\nu(|z|).$$

\*) См., например, Ватсон [1], гл. VI.

поэтому имеет место абсолютная сходимость, и изменение порядка суммирования и интегрирования является законным.

Справедливость результата (5.10.2) для любых комплексных  $\nu$ , принадлежащих области  $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ , вытекает из принципа аналитического продолжения\*).

Таким образом,

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt dt, \quad (5.10.3)$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}; \quad |\arg z| < \pi.$$

При подстановке  $t = \cos \theta$  формула (5.10.3) принимает вид

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta, \quad (5.10.4)$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad |\arg z| < \pi.$$

Чтобы получить второе важное интегральное представление для  $J_\nu(z)$ , воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s s^{-(k+\nu+1)}} ds, \quad (5.10.5)$$

где  $C$  — контур, изображенный на рис. 13.

Тогда получим

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s s^{-(k+\nu+1)}} ds =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s s^{-\nu-1}} ds \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z^2}{4s}\right)^k}{\Gamma(k+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s - \frac{z^2}{4s}} s^{-\nu-1} ds, \quad (5.10.6)$$

причем законность перемены порядка суммирования и интегрирования снова легко обосновывается путем доказательства абсолютной сходимости.

\* ) Обе стороны рассматриваемого равенства — регулярные функции  $\nu$  в области  $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ .

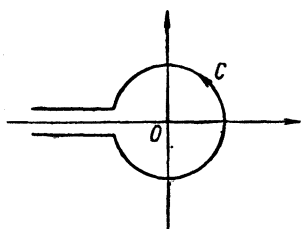


Рис. 13.

Считая временно  $z > 0$  и полагая  $s = \frac{zt}{2}$ , мы можем представить формулу (5.10.6) в виде

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1} dt, \quad (5.10.7)$$

где  $C'$  — контур, подобный  $C$ .

В силу принципа аналитического продолжения полученный результат справедлив во всей области  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ .

Полагая  $t = \rho e^{i\theta}$  и выбирая радиус окружности равным единице, находим

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_1^\infty e^{-\frac{z}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)} \rho^{-\nu-1} d\rho,$$

или после подстановки  $\rho = e^\alpha$ :

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha} d\alpha, \quad R(z) > 0, \quad \nu - \text{любое.} \quad (5.10.8)$$

В случае  $\nu = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) второе слагаемое исчезает и формула (5.10.8) принимает более простой вид.

Интегральные представления для функций Бесселя второго и третьего рода могут быть во многих случаях выведены из соответствующих интегральных представлений для функций первого рода, если воспользоваться соотношениями (5.4.5) и (5.6.4).

Так, например, считая  $R(z) > 0$  и  $\nu$  отличным от целого числа, получаем на основании формул (5.4.5) и (5.10.8)

$$Y_\nu(z) = \frac{\operatorname{ctg} \nu\pi}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \frac{\cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha} d\alpha - \frac{\operatorname{cosec} \nu\pi}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta + \nu\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha + \nu\alpha} d\alpha.$$

Если заменить в третьем интеграле  $\theta$  на  $(\pi - \theta)$ , то после элементарных вычислений находим при  $R(z) > 0$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha} (e^{\nu\alpha} + e^{-\nu\alpha} \cos \nu\pi) d\alpha. \quad (5.10.9)$$

Формула (5.10.9) доказана в предположении, что  $\nu$  отлично от целого числа, однако, так как обе стороны равенства представляют целые функции  $\nu$ , из принципа аналитического продолжения следует, что она остается справедливой при любых  $\nu$ .

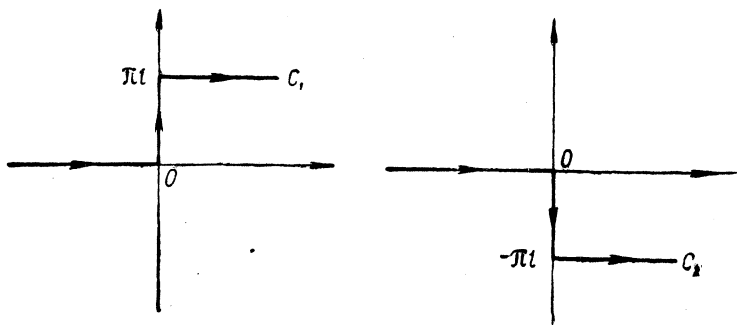


Рис. 14.

Интегральные представления для функций Ханкеля могут быть получены из найденных формул (5.10.8—9) и соотношений (5.6.1). Мы имеем, например, для  $R(z) > 0$ :

$$\begin{aligned}
 H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i(z \sin \theta - \nu \theta)} d\theta + \\
 &+ \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha} [e^{\nu \alpha} + e^{-\nu(\alpha + \pi i)}] d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{z \operatorname{sh} \alpha - \nu \alpha} d\alpha + \\
 &+ \frac{1}{\pi i} \int_{\theta=0}^\pi e^{z \operatorname{sh} i\theta - \nu i\theta} d(i\theta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha=0}^\infty e^{z \operatorname{sh}(\alpha + \pi i) - \nu(\alpha + \pi i)} d(\alpha + \pi i),
 \end{aligned}$$

или, если положить  $t = \alpha + i\theta$ ,

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} e^{z \operatorname{sh} t - \nu t} dt, \quad R(z) > 0, \quad (5.10.10)$$

где интегрирование производится по контуру  $C_1$  (рис. 14).

Аналогичным образом получается формула

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_2} e^{z \operatorname{sh} t - \nu t} dt, \quad R(z) > 0, \quad (5.10.11)$$

отличающаяся от первой лишь другим выбором пути интегрирования (рис. 14).

Если положить в (5.10.10—11) соответственно  $t = u \pm \frac{\pi i}{2}$ , эти формулы принимают вид:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{D_1} e^{iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad R(z) > 0, \quad (5.10.12)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{D_2} e^{-iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad R(z) > 0, \quad (5.10.13)$$

где путь интегрирования для каждого из интегралов изображен на рис. 15.

Для дальнейшего преобразования полученных формул предположим временно, что  $z > 0$ , и ограничим область изменения параметра  $\nu$  полосой  $-1 < R(\nu) < 1$ . В этом случае интеграл по левому

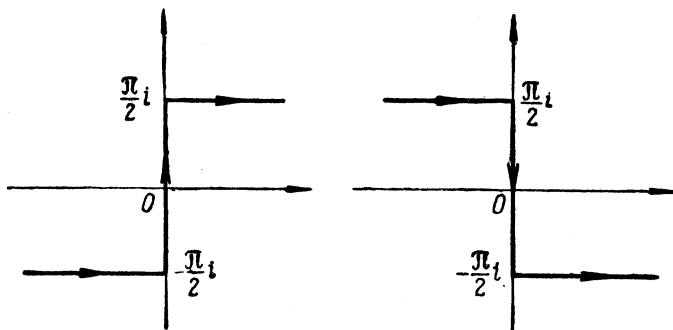


Рис. 15.

участку ломаной (до точки  $u = 0$ ) можно заменить, по теореме Коши, интегралом по отрицательной вещественной полуоси, а интеграл по правому участку ломаной — интегралом по положительной вещественной полуоси\*), и формулы (5.10.12—13) переходят в следующие:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad (5.10.14)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad (5.10.15)$$

где  $z > 0$ ,  $-1 < R(\nu) < 1$ .

\*) Легко видеть, что интегралы по вертикальным замыкающим отрезкам стремятся к нулю, если неограниченно отодвигать эти отрезки вправо и влево от мнимой оси.

Равенства (5.10.14—15) доказаны для положительных  $z$ , однако по принципу аналитического продолжения первая из этих формул сохраняет силу в области  $0 \leq \arg z < \pi$ , вторая — в области  $-\pi < \arg z \leq 0$ , так как в этих областях левая и правая части рассматриваемых равенств остаются регулярными функциями переменного  $z$ . Далее, если  $I(z) > 0$  в (5.10.14) или  $I(z) < 0$  в (5.10.15), условие  $-1 < R(\nu) < 1$  может быть отброшено.

Таким образом, имеют место следующие интегральные представления:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad I(z) > 0, \quad (5.10.16)$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad I(z) < 0, \quad (5.10.17)$$

$\nu$  — любое.

Формулы (5.10.16—17) дают основные интегральные представления для функций Ханкеля. Другие интегральные представления этих функций, полезные в различных приложениях, могут быть выведены из них надлежащим преобразованием определенных интегралов, входящих в рассматриваемые формулы. Возьмем в качестве примера первую из этих формул, предположим, что  $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ , и временно примем  $\arg z = \frac{\pi}{2}$ , так что  $(-iz)$  будет положительным. Принимая во внимание равенство (1.5.1), имеем

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-xy} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad (5.10.18)$$

откуда, полагая в (5.10.16)  $e^u = y$ , находим

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{\frac{iz}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)} y^{-\nu-1} dy = \\ &= \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{\frac{iz}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)} y^{-\frac{1}{2}} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx \int_0^{\infty} e^{-y\left(x-\frac{iz}{2}\right)+\frac{iz}{2y}} y^{-\frac{1}{2}} dy, \end{aligned}$$

причем законность изменения порядка интегрирования следует из легко доказываемой абсолютной сходимости двойного интеграла.

Внутренний интеграл вычисляется с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-av^2 - \frac{b}{v^2}} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}}, \quad a > 0, b > 0, \quad (5.10.19)$$

откуда вытекает

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\pi\nu}{2}}}{i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{-\frac{zi}{2}}\sqrt{x-\frac{iz}{2}}}}{\sqrt{x-\frac{iz}{2}}} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx,$$

или, если ввести новое переменное интегрирования

$$t = \frac{\sqrt{x - \frac{iz}{2}}}{\sqrt{-\frac{iz}{2}}},$$

то

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{2e^{-i\pi\nu}}{i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_1^{\infty} e^{izt} (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (5.10.20)$$

По теории аналитического продолжения эта формула, доказанная в предположении, что  $(-iz) > 0$ , остается справедливой для любых комплексных  $z$ , принадлежащих сектору  $0 < \arg z < \pi$ .

Аналогично для второй функции Ханкеля имеем формулу

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{-2e^{i\pi\nu}}{i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_1^{\infty} e^{-izt} (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad (5.10.21)$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad -\pi < \arg z < 0.$$

Интегральные представления (5.10.20—21) играют важную роль в выводе асимптотических выражений для цилиндрических функций при  $|z| \rightarrow \infty$  (§ 5.11).

Интегральные представления для функций Бесселя мнимого аргумента могут быть получены непосредственно путем небольшого видоизменения рассуждений настоящего параграфа или выведены из соответствующих интегральных представлений для функций Бесселя и Ханкеля с помощью соотношений (5.7.4—6).



Поступая таким образом, мы получим из (5.10.3) формулу

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} zt dt, \quad (5.10.22)$$

$$|\arg z| < \pi, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2},$$

из (5.10.16, 20) — формулы:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} u - \nu u} du = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} \nu u du, \quad (5.10.23)$$

$$R(z) > 0, \quad \nu - \text{любое};$$

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad (5.10.24)$$

$$R(z) > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Отметим еще интегральное представление

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\infty} e^{-t - \frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{4}, \quad (5.10.25)$$

которое получается из (5.10.23) заменой переменной интегрирования и оказывается полезным во многих приложениях.

Некоторые другие интегральные представления для цилиндрических функций и их произведений, полезные в приложениях, указаны в упражнениях к данной главе (примеры 1—9).

### § 5.11. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента

Цилиндрические функции обладают простыми асимптотическими представлениями, удобными для аппроксимации этих функций при больших по модулю значениях  $z$  и фиксированном значении индекса  $\nu$  \*). Главные члены этих формул можно получить, исходя из дифферен-

\*) Асимптотические представления для цилиндрических функций при больших по модулю  $\nu$  и фиксированном  $z$  могут быть получены сравнительно просто из формул (5.3.1), (5.4.5), (5.6.4), (5.7.1) и (5.7.2), если воспользоваться формулой Стирлинга для гамма-функции (1.4.22). Вопрос об аппроксимации цилиндрических функций при одновременном возрастании модулей  $z$  и  $\nu$  принадлежит к числу труднейших вопросов теории этих функций. Основные результаты, полученные в этой области, изложены в монографии Ватсона [1].

Новые формулы этого типа предложены недавно В. А. Фоком (Ватсон [1], стр. 717), Лангером [1], [2] и Черри [1]—[3].

циальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции, однако для вывода более точных выражений удобнее воспользоваться интегральными представлениями, найденными в § 5.10.

Из цилиндрических функций наиболее простые асимптотические представления имеют функции третьего рода.

Чтобы получить асимптотическое представление функции  $H_\nu^{(1)}(z)$ , воспользуемся равенством (5.10.20) и преобразуем его с помощью подстановки  $t = 1 + 2s$ . Тогда получим

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{2^{\nu+1} e^{i(z-i\pi\nu)} z^\nu}{i\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{2zts} s^{\nu-\frac{1}{2}} (1+s)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, \quad (5.11.1)$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}; \quad 0 < \arg z < \pi.$$

Заменяя множитель  $(1+s)^{\nu-\frac{1}{2}}$  биномиальным разложением с остаточным членом \*)

$$(1+s)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_k}{k!} s^k +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_{n+1}}{n!} s^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n (1+st)^{\nu-n-\frac{3}{2}} dt,$$

и интегрируя почленно, находим \*\*)

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_k \left(\frac{1}{2}+\nu\right)_k}{k!} (2zt)^{-k} + r_n(z) \right], \quad (5.11.2)$$

\*)

$$(1+\zeta)^\mu = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(-\mu)_k}{k!} \zeta^k +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{(-\mu)_{n+1}}{n!} \zeta^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n (1+\zeta t)^{\mu-\nu-1} dt,$$

$$|\arg(1+\zeta)| < \pi; \quad (\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1), \quad (\lambda)_0 = 1.$$

\*\*) На основании (1.5.1) мы имеем

$$\int_0^\infty e^{2zts} s^{k+\nu-\frac{1}{2}} ds = \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\nu + \frac{1}{2}\right)_k (-2zt)^{-(k+\nu+\frac{1}{2})},$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}; \quad 0 < \arg z < \pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$r_n(z) = \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2} - \nu\right)_{n+1} (-2zi)^{\nu + \frac{1}{2}}}{n! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{2zis} s^{\nu + n + \frac{1}{2}} ds \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^n (1+st)^{\nu - n - \frac{3}{2}} dt.$$

Предположим, что  $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$  ( $\delta$  — произвольное малое положительное число) и будем временно считать, что  $n$  выбрано так, что  $R(\nu) - n - \frac{3}{2} \leq 0$ . Оценка остаточного члена по модулю тогда дает\*)

$$|r_n(z)| \leq \frac{\left|\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_{n+1}\right| (2|z|)^{R(\nu) + \frac{1}{2}} e^{\pi |I(\nu)|}}{n! \left|\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right|} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-2|z|s \sin \delta} s^{R(\nu) + n + \frac{1}{2}} ds \int_0^1 (1-t)^n dt = \\ = \frac{\left|\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_{n+1}\right| (2|z|)^{R(\nu) + \frac{1}{2}} e^{\pi |I(\nu)|} \Gamma\left(R(\nu) + n + \frac{3}{2}\right)}{(n+1)! \left|\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right| (2|z| \sin \delta)^{R(\nu) + n + \frac{3}{2}}} = O(|z|^{-n-1})$$

при фиксированном  $\nu$ .

Таким образом, для больших  $|z|$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_k \left(\frac{1}{2} + \nu\right)_k}{k!} (2zi)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \\ R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta, \quad n \geq R(\nu) - \frac{3}{2}. \quad (5.11.3)$$

\*) Если  $a$  и  $b$  — комплексные числа, то

$$|a^b| = |a|^{R(b)} \cdot e^{-I(b) \arg a}.$$

Покажем, что условие, наложенное на  $n$ , может быть отброшено. Действительно, если  $R(\nu) - n - \frac{3}{2} > 0$ , то можно выбрать такое  $m > n$ , что  $R(\nu) - m - \frac{3}{2} \leq 0$ . Представив  $H_\nu^{(1)}(z)$  с помощью формулы (5.11.3), где  $n$  заменено на  $m$ , и замечая, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \dots + O(|z|^{-m-1}) &= \sum_{k=0}^n \dots + \sum_{k=n+1}^m \dots + O(|z|^{-m-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \dots + O(|z|^{-n-1}), \end{aligned}$$

мы снова приходим к прежнему результату.

Также легко с помощью соотношения  $H_\nu^{(1)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_{-\nu}^{(1)}(z)$  освободиться от ограничения, наложенного на параметр  $\nu$ .

Наконец, если воспользоваться вместо (5.10.20) интегральным представлением несколько более общего вида, можно показать, что найденная асимптотическая формула остается справедливой в более широком секторе  $|\arg z| \leq \pi - \delta^*$ .

Таким образом, окончательно для больших  $|z|$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, k) (2iz)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right],$$

$$|\arg z| \leq \pi - \delta, \quad (5.11.4)$$

где

$$(\nu, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2} - \nu\right)_k \left(\frac{1}{2} + \nu\right)_k = \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3^2) \dots 4\nu^2 - (2k-1)^2}{2^{2k} k!}.$$

Асимптотическое представление для функции  $H_\nu^{(2)}(z)$  получается аналогичным способом из формулы (5.10.21) и имеет следующий вид:

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[ \sum_{k=0}^n (\nu, k) (2iz)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right],$$

$$|\arg z| \leq \pi - \delta. \quad (5.11.5)$$

Асимптотические представления для цилиндрических функций первого и второго рода следуют из выведенных формул (5.11.4–5)

\* ) Ватсон [1], гл. VII.

и соотношений (5.6.1). Мы находим \*)

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, 2k) (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right] - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, 2k+1) (2z)^{-2k-1} + O(|z|^{-2n-3}) \right], \quad (5.11.6)$$

$$Y_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, 2k+1) (2z)^{-2k-1} + O(|z|^{-2n-3}) \right] + \\ + \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, 2k) (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right], \\ |\arg z| \leq \pi - \delta. \quad (5.11.7)$$

Асимптотические формулы для модифицированных цилиндрических функций могут быть выведены аналогичным образом из интегральных представлений (5.10.22), (5.10.24) или получены с помощью соотношений § 5.7.

Окончательные формулы имеют следующий вид:

$$I_\nu(z) = e^z (2\pi z)^{-1/2} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, k) (2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right] + \\ + e^{-z \pm \pi i \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} (2\pi z)^{-1/2} \left[ \sum_{k=0}^n (\nu, k) (2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \quad (5.11.8)$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[ \sum_{k=0}^n (\nu, k) (2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \quad (5.11.9)$$

$|\arg z| \leq \pi - \delta$ ; знак  $\pm$  соответствует  $I(z) \geq 0$ .

При условии, что  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ , второе слагаемое в (5.11.8) будет мало, и эта формула может быть записана в виде

$$I_\nu(z) = e^z (2\pi z)^{-1/2} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (\nu, k) (2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \quad (5.11.10) \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

\*) В формулах (5.11.6—8) число  $n$  в обеих суммах не обязательно брать одинаковым.

Из (5.11.4—10) следует, что расходящиеся ряды, получающиеся, если формально положить  $n = \infty$ , являются асимптотическими для функций, стоящих в левых частях рассматриваемых равенств (§ 1.4).

Способ, при помощи которого выведены рассматриваемые формулы, дает только порядок величины остаточного члена, но не позволяет сделать более точных заключений. При специальных предположениях относительно  $z$  и  $\nu$  можно, путем некоторого видоизменения рассуждений, получить значительно более точные результаты. Так, например, можно показать, что если  $z$  и  $\nu$  — вещественные положительные числа и число  $n$  взято настолько большим, что  $2n \geq \nu - \frac{7}{2}$ , то остатки асимптотических разложений для  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$  будут численно меньше первых отбрасываемых членов. В асимптотическом представлении для  $K_\nu(z)$  тот же результат имеет место при  $n \geq \nu - \frac{3}{2}$  \*).

### § 5.12. Теоремы сложения для цилиндрических функций

Пусть  $r_1, r_2, R$  — стороны произвольного треугольника,  $\theta$  и  $\psi$  — его углы, лежащие против сторон  $R$  и  $r_1$  (рис. 16), так что

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}, \quad \sin \psi = \frac{r_1}{R} \sin \theta.$$

Теоремами сложения в теории цилиндрических функций называются формулы вида

$$Z_\nu(\lambda R) = f_\nu(r_1, r_2, \theta) \sum_{(m)} \varphi_\nu^{(m)}(\lambda r_1) \psi_\nu^{(m)}(\lambda r_2) \chi_\nu^{(m)}(\theta) \quad (5.12.1)$$

( $\lambda$  — произвольное комплексное число,  $|\arg \lambda| < \pi$  \*\*), дающие разложение цилиндрической функции  $Z_\nu(\lambda R)$  в ряд, члены которого представляют собой произведение некоторой, не зависящей от индекса суммирования  $m$ , функции  $f_\nu(r_1, r_2, \theta)$  на множители, зависящие каждый только от одного из переменных ( $r_1, r_2, \theta$ ).

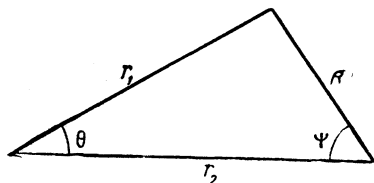


Рис. 16.

Формулы рассматриваемого типа играют важную роль в математической физике и других приложениях

цилиндрических функций. Простейшей среди них является теорема сложения для функции Бесселя первого рода с индек-

\*) Ватсон [1], гл. VII.

\*\*) Для целого  $\nu$  это ограничение отпадает.

сом нуль:

$$\begin{aligned}
 J_0(\lambda R) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) e^{im\theta} = \\
 &= J_0(\lambda r_1) J_0(\lambda r_2) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) \cos m\theta. \quad (5.12.2)
 \end{aligned}$$

Доказательство этой формулы может быть дано следующим образом. Представим левую часть равенства с помощью интеграла \*)

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) t^{-n-1} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где  $C$  — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку  $t = 0$ , и введем новое переменное интегрирования  $u$ , положив

$$t = \frac{r_1 e^{i\theta} - r_2}{R} u.$$

Принимая во внимание, что  $R^2 = (r_1 e^{i\theta} - r_2)(r_1 e^{-i\theta} - r_2)$ , имеем

$$J_0(\lambda R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{\lambda r_1}{2} \left(ue^{i\theta} - \frac{1}{ue^{i\theta}}\right) - \frac{\lambda r_2}{2} \left(u - \frac{1}{u}\right)} \frac{du}{u},$$

где интегрирование производится по контуру  $C'$ , подобному контуру  $C$ . Далее, на основании (5.3.4)

$$e^{\frac{\lambda r_1}{2} \left(ue^{i\theta} - \frac{1}{ue^{i\theta}}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) e^{im\theta} u^m,$$

причем сходимость ряда на контуре  $C'$  равномерна относительно  $u$ .

Подставляя это разложение и интегрируя почленно, находим

$$\begin{aligned}
 J_0(\lambda R) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) e^{im\theta} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{-\frac{\lambda r_2}{2} \left(u - \frac{1}{u}\right)} u^{m-1} du = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_{-m}(-\lambda r_2) e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) e^{im\theta},
 \end{aligned}$$

откуда следует справедливость равенства (5.12.2).

\*) Для доказательства этой формулы, представляющей специальный случай формулы (5.10.7), достаточно вычислить контурный интеграл, равный вычету подынтегральной функции в точке  $t = 0$ .

Формула (5.12.2) допускает два обобщения на случай функций Бесселя с произвольным индексом  $\nu$ . Первое из этих обобщений имеет вид

$$J_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu \psi}{\sin \nu \psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu+m}(\lambda r_2) J_m(\lambda r_1) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \quad (5.12.3)$$

где значение  $\psi$  указано на рис. 16, и, в случае, если  $\nu$  не является целым числом, предполагается, что  $r_2 > r_1$  \*). Второе из рассматриваемых обобщений дается формулой

$$\frac{J_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{J_{\nu+m}(\lambda r_1) J_{\nu+m}(\lambda r_2)}{(\lambda r_1)^\nu (\lambda r_2)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta), \quad (5.12.4)$$

( $r_1$  и  $r_2$  — любые),

где  $C_m^\nu(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , — полиномы Гегенбауэра, которые могут быть определены как коэффициенты разложения функции

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x) t^n, \quad (5.12.5)$$

представляющей собой производящую функцию для этих полиномов. Явные выражения для рассматриваемых полиномов будут:

$$\left. \begin{aligned} C_m^\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{m-2k} \frac{\Gamma(\nu + m - k)}{\Gamma(\nu) k! (m - 2k)!} x^{m-2k}, \\ C_0^\nu(x) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.12.6)$$

При  $\nu = \frac{1}{2}$  разложение (5.12.5) переходит в формулу (4.2.3) и полиномы Гегенбауэра совпадают с полиномами Лежандра:

$$C_m^{\frac{1}{2}}(x) = P_m(x). \quad (5.12.7)$$

При  $\nu = 0$   $C_m^0(x) \equiv 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , однако произведение  $\Gamma(\nu) C_m^\nu(x)$  стремится к конечному пределу, именно:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Gamma(\nu) (\nu + m) C_m^\nu(x) = 2 \cos(m \arccos x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.12.8)$$

\*) Для целого  $\nu = n$  это ограничение не существует и  $r_1$  и  $r_2$  могут быть переставлены местами.



Обе теоремы сложения (5.12.3) и (5.12.4) доказываются аналогично формуле (5.12.2), если исходить из соответствующих интегральных представлений для функций Бесселя\*). В предельном случае  $\nu \rightarrow 0$  рассматриваемые равенства переходят в равенство (5.12.2). Для цилиндрических функций других типов имеют место аналогичные теоремы сложения, из которых мы упомянем следующие:

$$Z_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu\psi}{\sin \nu\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+m}(\lambda r_2) J_m(\lambda r_1) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \quad (5.12.9)$$

$$\frac{Z_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{Z_{\nu+m}(\lambda r_2) J_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu (\lambda r_1)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta), \quad (5.12.10)$$

$$I_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu\psi}{\sin \nu\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m I_{\nu+m}(\lambda r_2) I_m(\lambda r_1) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \quad (5.12.11)$$

$$\frac{I_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\nu+m) \frac{I_{\nu+m}(\lambda r_2) I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu (\lambda r_1)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta), \quad (5.12.12)$$

$$K_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu\psi}{\sin \nu\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{\nu+m}(\lambda r_2) I_m(\lambda r_1) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \quad (5.12.13)$$

$$\frac{K_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{K_{\nu+m}(\lambda r_2) I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu (\lambda r_1)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta). \quad (5.12.14)$$

В этих формулах предполагается  $r_2 > r_1$  за исключением того случая, когда  $\nu$  есть целое число и в формулу входят только функции первого рода.

Важный частный случай рассматриваемых теорем сложения, встречающийся в математической физике, соответствует значению  $\nu = \frac{1}{2}$ . Формулы для этого случая легко получаются с помощью соотношений § 5.8 и равенства (5.12.7)\*\*).

### § 5.13. Нули цилиндрических функций

При решении многих прикладных вопросов необходимо иметь представление о распределении нулей цилиндрических функций на плоскости комплексного переменного и уметь приближенно вычислять их значения. Исследование этой проблемы, представляющей также

\*) Ватсон [1], гл. XI.

\*\*) См., например, Ватсон [1] 11.5, стр. 401.

значительный теоретический интерес, выходит за рамки настоящей книги, поэтому мы ограничимся сводкой наиболее важных результатов, полученных в этой области, отсылая читателя за доказательствами к специальным монографиям по теории цилиндрических функций\*).

Распределение нулей функций Бесселя с целым положительным значком, т. е. решений уравнения

$$J_n(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.13.1)$$

устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 4.** *Функция  $J_n(z)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) не имеет комплексных нулей и имеет бесконечное множество вещественных нулей, расположенных симметрично относительно точки  $z = 0$ , которая, в случае  $n = 1, 2, \dots$ , принадлежит к их числу. Все нули функции — простые, за исключением точки  $z = 0$ , которая при  $n = 1, 2, \dots$  является соответственно нулем кратности  $n$ .*

Распределение нулей функций Бесселя с произвольным вещественным индексом  $\nu$ , т. е. решений уравнения

$$J_\nu(z) = 0, \quad \nu — \text{вещественно}, \quad (5.13.2)$$

дается более общей теоремой 5.

**Теорема 5.** *Функция  $J_\nu(z)$  ( $|\arg z| < \pi$ ,  $\nu$  — любое вещественное число) имеет бесконечное множество вещественных положительных нулей и конечное число  $2N(\nu)$  комплексных сопряженных нулей, где, в зависимости от значения параметра  $\nu$ ,*

$$(1) N(\nu) = 0, \text{ если } \nu > -1 \text{ или } \nu = -1, -2, -3, \dots$$

$$(2) N(\nu) = t \text{ при } -(t+1) < \nu < -t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Если  $-2t < \nu < -(2t-1)$ , среди комплексных нулей имеется пара чисто мнимых.

Все нули функции простые, исключая, может быть, точку  $z = 0$ .

В математической физике часто встречается уравнение

$$\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0, \quad \nu > -1, \quad (5.13.3)$$

(где  $\alpha$  и  $\beta$  — заданные вещественные числа,  $|\arg z| < \pi$ ), которое можно рассматривать как обобщение уравнения (5.13.2). При указанном ограничении параметра  $\nu$  рассматриваемое уравнение имеет бесконечное множество положительных корней и не имеет комплексных

\*) Ватсон [1], гл. XV.

Заметим, что некоторые из результатов исследований, относящихся к нулям цилиндрических функций, могут быть получены при помощи рассуждений вполне элементарного характера.

корней, за исключением случая  $\frac{\alpha}{\beta} + \nu < 0$ , когда это уравнение имеет два чисто мнимых корня.

Распределение нулей функции  $I_\nu(z)$  может быть выведено из теоремы 5 с помощью соотношений § 5.7. В частности, отметим важный результат, что при  $\nu > -1$  все нули функции  $I_\nu(z)$  чисто мнимые. Функция Макдональда  $K_\nu(z)$  при вещественном  $\nu$  не имеет нулей в области  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ . Нули функции, лежащие в остальной части разрезанной плоскости, комплексные сопряженные и число их конечно \*).

Для приближенного вычисления корней уравнений, содержащих цилиндрические функции, применяется метод последовательных приближений, причем за хорошее начальное приближение во многих случаях могут быть приняты корни уравнений, получающихся из исходных при замене цилиндрических функций их асимптотическими представлениями.

### § 5.14. Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям

В математической физике часто возникает необходимость разложить заданную функцию в ряд или интеграл по цилиндрическим функциям, причем вид разложения определяется конкретными условиями задачи (§ 6.3—6.7). Мы рассмотрим наиболее важные из этих разложений, которые играют в различных приложениях цилиндрических функций такую же роль, как разложения в ряды и интегралы Фурье в приложениях тригонометрических функций. Первое место среди разложений рассматриваемого класса занимают ряды вида

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu \left( x_{\nu m} \frac{r}{a} \right), \quad 0 < r < a, \quad (5.14.1)$$

где  $f(r)$  — заданная в интервале  $(0, a)$  функция,  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя порядка  $\nu > -\frac{1}{2}$ ,  $x_{\nu m}$  — положительные корни уравнения  $J_\nu(x) = 0$ , расположенные в порядке возрастания.

Коэффициенты разложения  $c_m$  могут быть определены на основании свойства ортогональности системы функций  $J_\nu \left( x_{\nu m} \frac{r}{a} \right)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), которое получается следующим образом. Умножим уравнения

$$u''_\alpha + \frac{1}{r} u'_\alpha + \left( \alpha^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_\alpha = 0, \quad u''_\beta + \frac{1}{r} u'_\beta + \left( \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_\beta = 0,$$

\*) Ватсон [1], 15.7, стр. 562—564.

которым удовлетворяют функции  $u_\alpha = J_\nu(\alpha r)$  и  $u_\beta = J_\nu(\beta r)$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа), первое — на  $ru_\beta$ , второе — на  $ru_\alpha$ , вычтем одно из другого и проинтегрируем по промежутку  $(0, a)$ .

Мы находим тогда

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^a r u_\alpha u_\beta dr = r(u_\alpha u'_\beta - u_\beta u'_\alpha)|_0^a,$$

откуда, в предположении  $\nu > -1$ , следует

$$\int_0^a r J_\nu(\alpha r) J_\nu(\beta r) dr = \frac{\alpha \beta J_\nu(\alpha a) J'_\nu(\beta a) - \alpha a J_\nu(\beta a) J'_\nu(\alpha a)}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (5.14.2)$$

Если положить в (5.14.2)  $\alpha = \frac{x_{\nu m}}{a}$ ,  $\beta = \frac{x_{\nu n}}{a}$ , то приходим к равенству

$$\int_0^a r J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right) dr = 0, \quad m \neq n, \quad (5.14.3)$$

показывающему, что рассматриваемая система функций ортогональна на промежутке  $(0, a)$  с весом  $r$  (§ 4.1).

Переходя к пределу  $\beta \rightarrow \alpha$  в (5.14.2) и исключая вторые производные от функций Бесселя с помощью дифференциального уравнения (5.3.2), получаем

$$\int_0^a r J_\nu^2(\alpha r) dr = \frac{a^2}{2} \left[ J_\nu'^2(\alpha a) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 a^2}\right) J_\nu^2(\alpha a) \right], \quad (5.14.4)$$

откуда, если воспользоваться соотношением (5.3.5), имеем

$$\int_0^a r J_\nu^2\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(x_{\nu n}) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n}). \quad (5.14.5)$$

Предполагая, что разложение вида (5.14.1) возможно, находим формально, путем умножения на  $r J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right)$  и интегрирования по промежутку  $(0, a)$ , следующие значения коэффициентов  $c_m$ :

$$c_m = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu m})} \int_0^a f(r) r J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) dr, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.14.6)$$

Ряд (5.14.1) с коэффициентами, вычисленными по формулам (5.14.6), называется рядом Фурье — Бесселя.

Решение вопроса об условиях, обеспечивающих действительную сходимость рассматриваемого ряда к функции  $f(r)$ , дается следующей теоремой.

**Теорема 6.** Пусть  $f(r)$  — произвольная функция, определенная на промежутке  $(0, a)$  и удовлетворяющая условиям:

1°.  $f(r)$  кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке  $(0, a)$ ;

2°. интеграл

$$\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr$$

имеет конечное значение.

Тогда ряд Фурье — Бесселя сходится и имеет своей суммой  $\frac{1}{2} [f(r+0) + f(r-0)]$ , т. е. представляет  $f(r)$  во всякой точке непрерывности этой функции.

Доказательство теоремы можно найти в монографии Ватсона \*).

Обобщение рядов Фурье — Бесселя представляют ряды Дини, к которым мы приходим, рассматривая задачу о разложении функции  $f(r)$  в ряд вида (5.14.1), где  $x_{\nu m}$  — расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения (5.13.3)

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0. \quad (5.14.7)$$

Если воспользоваться соотношениями (5.14.2,4) и (5.14.7), то, так же как и выше, легко показать, что

$$\begin{aligned} \int_0^a r J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right) dr = \\ = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{a^2}{2} \left[ J_\nu'^2(x_{\nu n}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{\nu n}^2}\right) J_\nu^2(x_{\nu n}) \right], & m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14.8)$$

откуда для коэффициентов  $c_m$  получаются значения

$$c_m = \frac{2}{a^2 \left[ J_\nu'^2(x_{\nu m}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{\nu m}^2}\right) J_\nu^2(x_{\nu m}) \right]} \int_0^a r f(r) J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) dr. \quad (5.14.9)$$

Ряд (5.14.1) с коэффициентами, определяемыми формулами (5.14.9), носит название ряда Дини для функции  $f(r)$ . При условии, что  $f(r)$

\*) Ватсон [1], 18.24, стр. 649—651.

удовлетворяет условиям теоремы 6 и  $\frac{\alpha}{\beta} + \nu > 0$ , сумма ряда Дини равна  $f(r)$  во всякой точке непрерывности функции \*).

Разложения Фурье — Бесселя и Дини играют важную роль в проблемах математической физики. Примеры подобных разложений приведены в гл. VI (§ 6.3, 6.7).

Из интегральных разложений по функциям Бесселя первое место по своему прикладному значению занимает разложение в интеграл Фурье — Бесселя произвольной функции  $f(r)$ , определенной на промежутке  $(0, \infty)$ :

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= \int_0^{\infty} \lambda J_{\nu}(\lambda r) d\lambda \int_0^{\infty} \rho J_{\nu}(\lambda \rho) f(\rho) d\rho, \\ 0 < r < \infty, \quad \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14.10)$$

Формула (5.14.10) справедлива во всякой точке непрерывности  $f(r)$  при выполнении условий:

1°.  $f(r)$  — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке  $0 < r < a$ ;

2°. интеграл

$$\int_0^{\infty} \sqrt{r} |f(r)| dr$$

имеет конечное значение \*\*).

Формулу (5.14.10) часто называют также интегралом Ханкеля.

Примерами разложений рассматриваемого вида могут служить следующие формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda |z|} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (5.14.11)$$

$$\frac{e^{-k \sqrt{z^2 + r^2}}}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int_0^{\infty} e^{-|z| \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \frac{\lambda J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} d\lambda, \quad (5.14.12)$$

которые легко получаются на основании (5.15.1) и (5.15.7).

\*) Ватсон [1], 18.3—18.4, стр. 655—665. Там же смотри относительно видоизменений, которым подвергается разложение Дини, если  $\frac{\alpha}{\beta} + \nu \leq 0$ .

\*\*) См., например, Ватсон [1], 14.4, стр. 502—511. В точках разрыва значение интеграла равно полусумме  $\frac{1}{2} [f(r+0) + f(r-0)]$ .

Другое интегральное разложение, совершенно иного типа, содержащее интегрирование по значку цилиндрической функции и оказавшееся весьма полезным при рассмотрении различных проблем математической физики, было исследовано автором\*). Это разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau \int_0^{\infty} f(\xi) \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad x > 0, \quad (5.14.13)$$

где  $K_\nu(x)$  — функция Макдональда с мнимым значком  $\nu = i\tau$ ,  $f(x)$  — произвольная функция, заданная на интервале  $(0, \infty)$  и удовлетворяющая условиям:

1°.  $f(x)$  — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке  $0 < x < a$ ;

2°, интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| x^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{x} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |f(x)| dx \quad (5.14.14)$$

имеют конечное значение.

В точке разрыва левую часть формулы (5.14.13) следует заметить полусуммой  $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ .

Примером разложения рассматриваемого типа может служить формула

$$f(x) = \sqrt{x} e^{-x \cos \alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} \alpha \tau}{\sin \alpha} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau. \quad (5.14.15)$$

Некоторые приложения полученных формул к математической физике приведены в гл. VI.

### § 5.15. Определенные интегралы, содержащие цилиндрические функции

В приложениях часто встречается необходимость в вычислении определенных интегралов, содержащих цилиндрические функции в различных комбинациях с элементарными функциями и специальными функциями других типов. Метод вычисления таких интегралов

\*) Лебедев Н. Н. [1], [2], [4].

заключается обычно в замене цилиндрической функции рядом или интегралом подходящего вида и перестановке порядка выполняемых операций.

Достаточно подробное изложение рассматриваемого вопроса имеется в монографии Ватсона\*), в связи с чем мы ограничимся примерами, иллюстрирующими применение метода и содержащими результаты, необходимые в других разделах настоящей книги.

В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx,$$

где  $a$  и  $b$  — вещественные положительные числа.

Подставляя вместо  $J_0(bx)$  ее интегральное представление (5.10.8), находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx &= \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(bx \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin \varphi) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Перемена порядка интегрирования законна ввиду абсолютной сходимости двойного интеграла. Таким образом,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > 0, b > 0. \quad (5.15.1)$$

Второй интересный пример доставляет интеграл Вебера

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx,$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $R(\nu) > -1$ .

\*) Ватсон [1], гл. XII — XIII.

Большое число интегралов, содержащих цилиндрические функции, приведено в справочниках Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера, Трикоми [1], [2] и Оберхеттингера [1].



Для вычисления этого интеграла заменим функцию Бесселя степенным рядом (5.3.1) и проинтегрируем почленно. Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{\nu+1} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{bx}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{2\nu+2k+1} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{1}{2a^{2\nu+2k+2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\nu+k} dt = \\ &= \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Законность перестановки порядка интегрирования и суммирования здесь также следует из абсолютной сходимости. Таким образом, имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad (5.15.2)$$

$a > 0, b > 0, R(\nu) > -1.$

Следующий интеграл, часто встречающийся в приложениях,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu}(bx)}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} dx, \quad a > 0, b > 0, \quad -1 < R(\nu) < 2R(\mu) + \frac{3}{2},$$

может быть вычислен путем замены в подынтегральном выражении функции  $(x^2+a^2)^{-\mu-1}$  интегралом типа (1.5.1):

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+a^2)t} t^{\mu} dt, \quad R(\mu) > -1, \quad (5.15.3)$$

если предположить временно, что  $-1 < R(\nu) < 2R(\mu) + \frac{1}{2}$ .

Воспользовавшись формулой (5.15.2) и интегральным представлением (5.10.25) для функции Макдональда, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu}(bx) dx}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} &= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} t^{\mu} dt \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \\ &= \frac{b^{\nu}}{2^{\nu+1} \Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-a^2 t - \frac{b^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\nu+1-\mu}} = \\ &= \frac{b^{\nu} a^{2\nu-2\mu}}{2^{\nu+1} \Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-u - \frac{(ab)^2}{4u}} \frac{du}{u^{\nu-\mu+1}} = \frac{a^{\nu-\mu} b^{\mu}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab). \end{aligned}$$

Распространение результата на все значения параметра  $\mu$ , удовлетворяющие поставленному выше условию, может быть дано с помощью принципа аналитического продолжения. Поэтому мы имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu}(bx) dx}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} = \frac{a^{\nu-\mu} b^{\mu}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab), \quad (5.15.4)$$

$$a > 0, b > 0, -1 < R(\nu) < 2R(\mu) + \frac{3}{2}.$$

В частности, полагая в полученной формуле  $\mu = -\frac{1}{2}$ ,  $\nu = 0$ , находим (§ 5.8):

$$\int_0^{\infty} \frac{x J_0(bx) dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{e^{-ab}}{b}, \quad a \geq 0, b > 0. \quad (5.15.5)$$

В заключение рассмотрим вычисление интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx,$$

$$a > 0, b > 0, y > 0, R(\nu) > -1,$$

который также имеет многочисленные приложения в математической физике.

Воспользовавшись интегральным представлением (5.10.25) и формулой (5.15.2), находим:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx &= \\
 &= \frac{a^{\mu}}{2^{\mu+1}} \int_0^{\infty} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx \int_0^{\infty} e^{-t-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1}} = \\
 &= \frac{a^{\mu}}{2^{\mu+1}} \int_0^{\infty} e^{-t-\frac{a^2y^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \\
 &= 2^{\nu-\mu} a^{\mu-2\nu-2} b^{\nu} \int_0^{\infty} e^{-t\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{a^2y^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu-\nu}} = \\
 &= \frac{2^{\nu-\mu} b^{\nu}}{a^{\mu}} (a^2+b^2)^{\mu-\nu-1} \int_0^{\infty} e^{-u-\frac{y^2(a^2+b^2)}{4u}} \frac{du}{u^{\mu-\nu}} = \\
 &= \frac{b^{\nu}}{a^{\mu}} \left( \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y} \right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}(y\sqrt{a^2+b^2}).
 \end{aligned}$$

Давая различные значения параметрам в формуле

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx &= \\
 &= \frac{b^{\nu}}{a^{\mu}} \left( \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y} \right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}(y\sqrt{a^2+b^2}), \quad (5.15.6) \\
 &a > 0, \quad b > 0, \quad y > 0, \quad R(\nu) > -1,
 \end{aligned}$$

мы можем получить ряд полезных формул, встречающихся в приложениях. Например, полагая  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $\nu = 0$ , имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx) x dx = \frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (5.15.7)$$

и т. д.

### § 5.16. Цилиндрические функции с вещественными положительными аргументом и значком

Содержание настоящего параграфа, который имеет вполне элементарный характер, составляет краткое описание свойств цилиндрических функций с аргументом  $x \geq 0$  и значком  $\nu \geq 0$ , особенно часто встречающихся в приложениях.

Для таких значений  $x$  и  $\nu$  функция Бесселя первого рода  $J_\nu(x)$  представляет собой вещественную ограниченную функцию переменного  $x$ , имеющую колебательный характер. Поведение рассматриваемой функции при малых и больших значениях  $x$  дается соответственно формулами:

$$\left. \begin{aligned} J_\nu(x) &\approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \\ J_\nu(x) &\approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.16.1)$$

Функция  $J_\nu(x)$  имеет бесконечное множество нулей, к числу которых в случае  $\nu > 0$  принадлежит также точка  $x=0$ . Графики функций  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  показаны на рис. 17.

Функция Бесселя второго рода  $Y_\nu(x)$  при  $x > 0$  представляет вещественную ограниченную на бесконечности колеблющуюся функцию. Поведение этой функции при малых и больших значениях  $x$  характеризуется асимптотическими формулами:

$$\left. \begin{aligned} Y_\nu(x) &\approx -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}, \quad \nu > 0, \\ Y_\nu(x) &\approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_0(x) &\approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x}, \end{aligned} \right\} \quad (5.16.2)$$

показывающими, в частности, что  $Y_\nu(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow 0$ .

Функции Ханкеля  $H_\nu^{(1)}(x)$  и  $H_\nu^{(2)}(x)$  для рассматриваемых значений  $x$  и  $\nu$  являются комплексно сопряженными функциями, ограниченными при  $x > 0$ . Поведение этих функций для малых и больших значений  $x$  дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} H_\nu^{(1),(2)}(x) &\approx \mp i \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}, \quad \nu > 0, \\ H_\nu^{(1),(2)}(x) &\approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ H_0^{(1),(2)}(x) &\approx \mp i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x}, \end{aligned} \right\} \quad (5.16.3)$$

где верхний знак относится к функции первого, нижний — к функции второго рода. Очевидно, что  $H_\nu^{(1),(2)}(x) \rightarrow \infty$ , когда  $x \rightarrow 0$ .

Функции Бесселя мнимого аргумента  $I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  представляют собой вещественные положительные монотонные функции перемен-

ного  $x$ , из которых первая неограниченно растет, вторая — убывает при возрастании  $x$ . Для малых  $x \rightarrow 0$ :

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, & K_\nu(x) &\underset{x \rightarrow 0, \nu > 0}{\approx} \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^\nu}, \\ & & K_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \ln \frac{2}{x}, \end{aligned} \right\} \quad (5.16.4)$$

поэтому  $I_\nu(0) = 0$  ( $\nu > 0$ ),  $I_0(0) = 1$ ,  $K_\nu(0) = \infty$ .

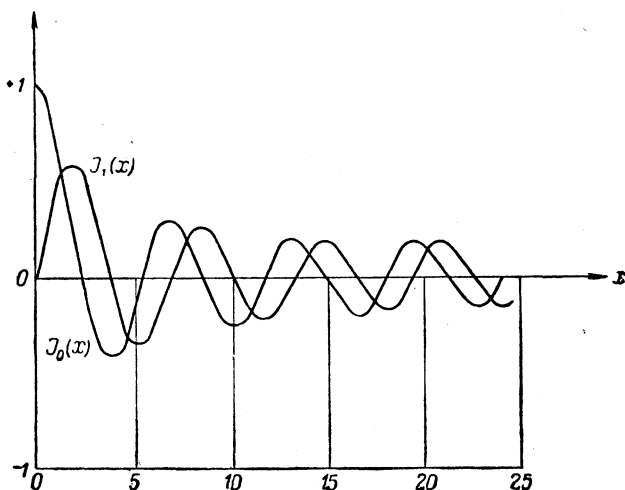


Рис. 17.

Асимптотическое поведение рассматриваемых функций при  $x \rightarrow \infty$  представляется равенствами:

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}, \quad K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (5.16.5)$$

Функции  $I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  не имеют нулей при  $x > 0$ .

### § 5.17. Функции Эйри

С цилиндрическими функциями связаны так называемые функции Эйри, которые представляют собой решения дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' - zu = 0. \quad (5.17.1)$$

Функции Эйри играют важную роль в теории асимптотических представлений различных специальных функций, являющихся интегралами линейных дифференциальных уравнений\*). В частности, с их помощью оказывается возможным получить асимптотические представления для цилиндрических функций при больших по модулю значениях аргумента  $z$  и индекса  $\nu$ , справедливые в широкой области изменения переменных.

Функции Эйри находят также разнообразные применения в математической физике, например в теории дифракции радиоволн у земной поверхности\*\*).

Ниже дается краткий обзор теории рассматриваемого класса функций.

В соответствии с результатами § 5.4 (уравнение (5.4.12)) и § 5.7, общий интеграл уравнения (5.17.1) может быть выражен через модифицированные цилиндрические функции порядка  $\nu = \pm 1/3$ . В частности, линейно независимыми решениями уравнения являются функции Эйри первого и второго рода:

$$\left. \begin{aligned} u = u_1 = \text{Ai}(z) &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{3} \left[ I_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} \right) - I_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right] \equiv \frac{1}{\pi} \left( \frac{z}{3} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} \right), \\ u = u_2 = \text{Bi}(z) &= \left( \frac{z}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ I_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + I_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right], \\ &|\arg z| < \frac{2\pi}{3}. \end{aligned} \right\} (5.17.2)$$

Если заменить цилиндрические функции соответствующими рядами типа (5.7.1), то для  $\text{Ai}(z)$  и  $\text{Bi}(z)$  получаются разложения

$$\left. \begin{aligned} \text{Ai}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^{2k+\frac{2}{3}} k! \Gamma(k+\frac{2}{3})} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k+1}}{3^{2k+\frac{4}{3}} k! \Gamma(k+\frac{4}{3})}, \\ \text{Bi}(z) &= 3^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^{2k+\frac{2}{3}} k! \Gamma(k+\frac{2}{3})} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k+1}}{3^{2k+\frac{4}{3}} k! \Gamma(k+\frac{4}{3})} \right], \\ &|z| < \infty, \end{aligned} \right\} (5.17.3)$$

которые показывают, что функции Эйри представляют собой целые функции переменного  $z$ .

\*) См., например, Лангер [1], [2]; Черри [1] — [3]; В. А. Фок [2].

\*\*\*) В. А. Фок [3].

Формулы (5.17.3) могут быть записаны также в другом, несколько более компактном виде. Например, первая из этих формул эквивалентна следующей:

$$\text{Ai}(z) = \frac{2}{3^{7/6}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{3} (k+1)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{k+3}{3}\right)} \left(\frac{z}{3^{2/3}}\right)^k, \quad |z| < \infty. \quad (5.17.4)$$

Если воспользоваться формулой утроения  $\Gamma$ -функции (стр. 28, пример 4), то последнее равенство принимает вид

$$\text{Ai}(z) = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \sin \frac{2\pi}{3} (k+1)}{k!} \left(\frac{1}{3^{2/3}} z\right)^k, \quad |z| < \infty. \quad (5.17.5)$$

Из формул (5.17.3) следует, что функции Эйри могут быть определены как интегралы уравнения (5.17.1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} u_1(0) = \text{Ai}(0) &= \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, & u_2(0) = \text{Bi}(0) &= \frac{3^{-\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \\ u_1'(0) = \text{Ai}'(0) &= \frac{-3^{-\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}, & u_2'(0) = \text{Bi}'(0) &= \frac{3^{-\frac{5}{6}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.17.6)$$

Вронскиан рассматриваемой пары решений будет

$$W \{ \text{Ai}(z), \text{Bi}(z) \} = W \{ \text{Ai}(z), \text{Bi}(z) \}_{z=0} = \frac{1}{\pi}, \quad (5.17.7)$$

причем при доказательстве этого равенства снова используется формула утроения  $\Gamma$ -функции.

Асимптотические представления функций Эйри для больших по модулю  $z$  могут быть выведены из соответствующих результатов § 5.11. В частности, мы имеем:

$$\text{Ai}(z) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3} z^{3/2}} \left[ 1 + O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right) \right], \quad (5.17.8)$$

$$|\arg z| \leq \frac{2\pi}{3} - \delta;$$

$$\text{Bi}(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} z^{3/2}} \left[ 1 + O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right) \right], \quad (5.17.9)$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{3} - \delta.$$

Функции Эйри от аргумента  $(-z)$  выражаются через функции Бесселя с индексом  $\nu = \pm \frac{1}{3}$ .

$$\left. \begin{aligned} \text{Ai}(-z) &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{3} \left[ J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right) + J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right) \right], \\ \text{Bi}(-z) &= \left( \frac{z}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right) - J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right) \right], \\ &|\arg z| < \frac{2\pi}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.17.10)$$

Доказательство этих формул вытекает непосредственно из (5.17.3) и (5.3.1). Если воспользоваться асимптотикой функций Бесселя, то получаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ai}(-x) &\approx \pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \cos \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right), \\ \text{Bi}(-x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} -\pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \sin \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.17.11)$$

откуда следует, что функции Эйри при больших отрицательных значениях аргумента имеют колебательный характер.

В заключение приведем некоторые интегральные представления для функций Эйри.

Из определения функции  $\text{Ai}(x)$  и интегрального представления для функции Макдональда (стр. 181, пример 6(3)), находим

$$\text{Ai}(x) = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3\pi} \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \text{sh } y \right) \text{ch } \frac{y}{3} dy, \quad x > 0,$$

или, если положить  $\text{sh } \frac{y}{3} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} t$ , то

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{1}{3} t^3 + xt \right) dt, \quad x \geq 0. \quad (5.17.12)$$

Несколько более сложные рассуждения позволяют вывести интегральное представление для функции второго рода:

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{1}{3} t^3 - xt} + \sin \left( \frac{1}{3} t^3 + xt \right) \right] dt, \quad x \geq 0. \quad (5.17.13)$$



Наконец, если воспользоваться результатами примера 7 (2), стр. 181, то получается интересное интегральное представление для квадрата функции  $Ai(x)$ :

$$[Ai(x)]^2 = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \int_0^{\infty} J_0\left(\frac{1}{12}t^3 + xt\right) t dt, \quad x \geq 0. \quad (5.17.14)$$

Сведения о имеющихся таблицах функций Эйри приведены в конце следующего параграфа после описания таблиц цилиндрических функций.

### § 5.18. Сведения о таблицах цилиндрических функций

Цилиндрические функции принадлежат к числу хорошо табулированных функций, что делает применение этих функций весьма удобным при рассмотрении различных вопросов физики и техники. Из числа наиболее распространенных и подробных таблиц цилиндрических функций в первую очередь должны быть упомянуты следующие таблицы:

1. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Изд. АН СССР, 1959:

$$\left. \begin{array}{l} J_0(x), J_1(x), Y_0(x), Y_1(x), \\ I_0(x), I_1(x), K_0(x), K_1(x) \end{array} \right\} x = 0(0,01) 10, \quad \begin{array}{l} 5 \text{ дес. зн.} \\ 5-6 \text{ зн. ц.} \end{array}$$

2. Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, Изд. АН СССР, 1958:

$$\left. \begin{array}{l} J_0(x), J_1(x), \\ Y_0(x), Y_1(x) \end{array} \right\} x = 0(0,001) 15(0,01) 100, \quad \begin{array}{l} 7 \text{ дес. зн.} \\ - 7 \text{ зн. ц.} \end{array}$$

3. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, Изд. АН СССР, 1950:

$$\left. \begin{array}{l} I_0(x), I_1(x), \\ K_0(x), K_1(x) \end{array} \right\} x = 0(0,001) 10, \quad \begin{array}{l} 8 \text{ дес. зн.} \\ 8 \text{ зн. ц.} \end{array}$$

4. Люстерник Я. А., Акушский И. Я. и Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат, 1949:

$$J_0(x), J_1(x), \quad x = 0(0,001) 16(0,01) 25, \quad 7 \text{ дес. зн.}$$

Там же приведены следующие таблицы.

Корни уравнений и значения нормирующих множителей:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 0, \quad x = \alpha_k, & 2 \{J_1^2(\alpha_k)\}^{-1}; \\ J_1(x) &= 0, \quad x = \beta_k, & 2 \{J_0^2(\beta_k)\}^{-1} = 2 \{J_2^2(\beta_k)\}^{-1}; \\ J_1'(x) &= 0, \quad x = \gamma_k, & 2 \{(1 - \gamma_k^{-2})J_1^2(\gamma_k)\}^{-1}; \\ & & k = 1(1)40. \end{aligned}$$

Таблицы функций:

$$\left. \begin{aligned} J_0(\alpha_k x), \quad J_0(\beta_k x), \\ J_1(\beta_k x), \quad J_1(\gamma_k x), \end{aligned} \right\} x = 0(0,01)1; \quad k = 1(1)40.$$

Последние таблицы имеют большое прикладное значение в связи с разложениями Фурье — Бесселя и Дини (§ 5.14), встречающимися в математической физике.

5. Фаддеева В. Н. и Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя целых номеров, Гостехиздат, 1950:

$$\begin{aligned} J_n(x), \quad x = 0(0,1)125, \quad n = 0(1)120, & \quad 6 \text{ дес. зн.} \\ J_n(x), \quad x = 0(0,01)15, \quad n = 0(1)13, & \quad 8 \text{ зн. ц.} \end{aligned}$$

Корни уравнений

$$J_n(x) = 0, \quad n = 0(1)115.$$

6. Ватсон [1]:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x), \quad Y_0(x), \quad J_1(x), \quad Y_1(x), \\ |H_0^{(1)}(x)|, \quad \arg H_0^{(1)}(x), \\ |H_1^{(1)}(x)|, \quad \arg H_1^{(1)}(x), \\ e^{-x}I_0(x), \quad e^x K_0(x), \\ e^{-x}I_1(x), \quad e^x K_1(x), \end{aligned} \right\} x = 0(0,02)16, \quad 7 \text{ дес. зн.}$$

$$\left. \begin{aligned} J_n(x), \quad x = 0(0,1)5(1)12, \quad n = 2(1)5, \\ x = 1(1)12, \quad n = 6(1)11, \\ x = 4(1)12, \quad n = 12(1)17, \\ x = 7(1)12, \quad n = 18(1)20, \end{aligned} \right\} 6-7 \text{ дес. зн.}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_n(x), \quad x = 0(0,1)5, \quad n = 0(1)10, \\ K_n(x), \quad x = 0(0,1)5, \quad n = 0(1)10, \\ J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x), \quad x = 1(1)50, \quad n = 0(1)6, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 7 \text{ дес. зн.} \\ 6 \text{ дес. зн.} \end{array}$$

$$\begin{aligned} R \{J_0(\rho e^{i\varphi})\}, \quad I \{J_0(\rho e^{i\varphi})\}, \\ R \{J_1(\rho e^{i\varphi})\}, \quad I \{J_1(\rho e^{i\varphi})\}, \quad \rho = 0(0,05)10, \quad \varphi = 0(5^\circ)90^\circ, \quad 7 \text{ зн.} \end{aligned}$$

Кроме того, помещены таблицы функций с индексом  $\frac{1}{3}$ ,  $\pm \frac{2}{3}$ ,  $\pm \frac{1}{4}$ ,  $\pm \frac{3}{4}$  и ряд других таблиц.

7. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959:

$$\left. \begin{array}{l} J_0(x), J_1(x), \\ Y_0(x), Y_1(x), \end{array} \right\} x = 0(0,01) 15,5, \quad 4 \text{ дес. зн.}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_0(x), I_1(x), \\ \frac{2}{\pi} K_0(x), \frac{2}{\pi} K_1(x), \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0(0,01) 10, \\ x = 0(0,01) 16, \end{array} \quad 4-5 \text{ зн. ц.}$$

8. British Association Math. Tables, 6, Cambridge, 1937:

$$\begin{array}{ll} J_0(x), J_1(x), & x = 0(0,001) 16(0,01) 25, \quad 10 \text{ дес. зн.} \\ Y_0(x), Y_1(x), & x = 0(0,01) 25, \quad 8 \text{ дес. зн.} \\ I_0(x), I_1(x), & x = 0(0,001) 5, \quad 7-8 \text{ дес. зн.} \\ K_0(x), K_1(x), & x = 0(0,01) 5, \quad 8-9 \text{ зн. ц.} \\ e^{-x}I_0(x), e^{-x}I_1(x), & x = 5(0,01) 10(0,1) 20, \quad 8 \text{ дес. зн.} \\ e^xK_0(x), e^xK_1(x), & \end{array}$$

9. Морган (Morgan S.), Tables of Bessel Functions of Imaginary Order and Imaginary argument, Pasadena, 1947.

Табулированы функции:

$$\frac{\pi}{\text{sh } \pi\tau} R \{I_{i\tau}(e^x)\}, \quad \tau = 0,2(0,2) 10, \quad x = -0,49(0,01) 2,50.$$

$$\begin{array}{ll} \tau = 0,2(0,2) 10, & x = -0,49(0,01) 0,50 \\ \tau = 1,2(0,2) 10, & x = 0,51(0,01) 1,00 \\ \tau = 2,2(0,2) 10, & x = 1,01(0,01) 1,50 \\ \tau = 4,2(0,2) 10, & x = 1,51(0,01) 2,00 \\ \tau = 7,2(0,2) 10, & x = 2,01(0,01) 2,50 \\ \tau = 0,2(0,2) 7, & x = 1,0(0,5) 2,5. \end{array}$$

$$-\frac{\pi}{\text{sh } \pi\tau} I \{I_{i\tau}(e^x)\} = K_{i\tau}(e^x),$$

Следует отметить, что в связи с многочисленными приложениями модифицированных цилиндрических функций с мнимым значком (см., например, § 6.5) составление подробных таблиц функции  $K_{i\tau}(x)$  представляет весьма актуальную задачу.

10. Фок В. А., Таблицы функций Эйри, Изд. НИИ-108, 1946:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\pi} \text{Ai}(x), \sqrt{\pi} \text{Ai}'(x), \\ \sqrt{\pi} \text{Bi}(x), \sqrt{\pi} \text{Bi}'(x), \end{array} \right\} x = -9(0,02) 9, \quad 4-5 \text{ зн. ц.}$$

11. Миллер (Miller J.C.P.), The Airy integral giving tables of solution of the differential equation  $y'' = xy$ , Cambr. Univ. Press, 1946:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ai}(x), \text{Ai}'(x), \quad x = -20(0,01)2, \\ \text{Bi}(x), \text{Bi}'(x), \quad x = -10(0,1)2,5 \end{array} \right\} \quad 8 \text{ дес. зн.}$$

Библиографические сведения о таблицах цилиндрических функций можно найти в справочниках А. В. Лебедева и Р. М. Федоровой [1], Н. М. Буруновой [1], Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

### Упражнения

1. Получить интегральные представления для квадрата функции Бесселя с целым значком

$$J_n^2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2n}(2z \cos \theta) d\theta = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2z \cos \theta) \cos 2n\theta d\theta,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

(Ватсон [1], стр. 41—43).

2. Вывести формулу более общего вида для произведения функций Бесселя с разными значками

$$J_\mu(z) J_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\mu+\nu}(2z \cos \theta) \cos(\mu - \nu)\theta d\theta,$$

$$R(\mu + \nu) > -1$$

(Ватсон [1], стр. 165).

3. Показать, что

$$J_n(z) J_n(z') = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_0(\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \theta}) \cos n\theta d\theta,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой сложения (5.12.2).

4. Получить интегральные представления:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(x \operatorname{ch} t - \frac{\pi\nu}{2}\right) \operatorname{ch} \nu t dt,$$

$$Y_\nu(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(x \operatorname{ch} t - \frac{\pi\nu}{2}\right) \operatorname{ch} \nu t dt,$$

$$-1 < R(\nu) < 1, \quad x > 0.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться равенствами (5.10.14), (5.10.15).

5. Вывести формулы:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{s}{2iz}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds,$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-i(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2iz}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds,$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

6. Получить интегральные представления для функции Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^\nu}{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2\nu} t dt, \quad R(z) > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2},$$

$$K_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{x^\nu \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos xt}{(1+t^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt, \quad x > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2},$$

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\cos \frac{\pi\nu}{2}} \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t) \operatorname{ch} \nu t dt, \quad x > 0, \quad |R(\nu)| < 1,$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-z}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds,$$

$$|\arg z| < \pi, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Доказательство указанных формул можно найти, например, в монографии Ватсона [1], стр. 202 и 206—209.

7. Доказать следующие формулы:

$$K_\nu(x) K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(t + \frac{x^2+y^2}{t}\right)} K_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty K_0(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} t}) \operatorname{ch} \nu t dt, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$K_\nu(x) K_\nu(y) = \frac{\pi}{2 \sin \pi\nu} \int_0^\infty J_0(\sqrt{2xy \operatorname{ch} t - x^2 - y^2}) \operatorname{sh} \nu t dt,$$

$$\left| \ln \frac{y}{x} \right|$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad |R(\nu)| < \frac{1}{4}.$$

8. Вывести интегральное представление для произведения функций первого и второго рода

$$I_\nu(x) K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_0(\sqrt{2xy \operatorname{ch} t - x^2 - y^2}) e^{-\nu t} dt, \\ \ln \frac{y}{x} \\ x > 0, \quad y > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{4}.$$

9. Показать, что

$$K_\mu(x) K_\nu(x) = \int_0^{\infty} K_{\mu-\nu}\left(2x \operatorname{ch} \frac{t}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{\mu+\nu}{2} t dt, \\ x > 0, \quad y > 0.$$

Указание к примерам 7—9. Наиболее подробное исследование, посвященное получению различных интегральных представлений для произведений цилиндрических функций, содержится в работах Диксона и Феррара [1], [2]. Некоторые из указанных формул приведены также у Ватсона ([1], стр. 483—485).

10. Получить асимптотические формулы для цилиндрических функций при больших значениях индекса

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\nu + \nu \ln \frac{z}{2} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \ln \nu}, \quad |\arg \nu| \leq \pi - \delta, \\ |\nu| \rightarrow \infty \\ K_{i\tau}(x) \approx \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau - \tau \ln \frac{x}{2}\right) \\ \tau \rightarrow \infty$$

( $x$  — фиксированное положительное число).

11. Вывести формулы:

$$J_\nu(-x + i0) - J_\nu(-x - i0) = 2i \sin \pi\nu J_\nu(x), \\ Y_\nu(-x + i0) - Y_\nu(-x - i0) = 2i [J_\nu(x) \cos \pi\nu + J_{-\nu}(x)], \\ H_\nu^{(1)}(-x + i0) - H_\nu^{(1)}(-x - i0) = -2 [J_{-\nu}(x) + e^{-i\pi\nu} J_\nu(x)], \\ H_\nu^{(2)}(-x + i0) - H_\nu^{(2)}(-x - i0) = 2 [J_\nu(x) + e^{i\pi\nu} J_\nu(x)], \\ x > 0,$$

характеризующие поведение цилиндрических функций на разрезе  $(-\infty, 0)$ .

12. Показать, что

$$I_\nu(-x + i0) - I_\nu(-x - i0) = 2i \sin \pi\nu I_\nu(x), \\ K_\nu(-x + i0) - K_\nu(-x - i0) = -\pi i [I_{-\nu}(x) + I_\nu(x)], \\ x > 0.$$

Примечание. Формулы, приведенные в примерах 11—12, принимают простой вид при  $\nu = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

13. Доказать равенство

$$\int_0^z J_\nu(t) dt = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(z), \quad R(\nu) > -1.$$

Указание. С помощью рекуррентной формулы (5.3.5) показать, что производные от обеих частей рассматриваемого равенства совпадают.

14. Вывести рекуррентную формулу

$$\int_0^z t^\mu J_\nu(t) dt = z^\mu J_{\nu+1}(z) - (\mu - \nu - 1) \int_0^z t^{\mu-1} J_{\nu+1}(t) dt,$$

$$R(\mu + \nu) > -1.$$

Указание. Воспользоваться соотношением (5.3.6):

$$t^{\nu+1} J_\nu(t) = \frac{d}{dt} [t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t)]$$

и применить интегрирование по частям.

15. На основании предыдущего примера показать, что вычисление интегралов вида

$$\int_0^z t^m J_\nu(t) dt, \quad R(\nu) > -1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

приводится к вычислению интеграла

$$\int_0^z J_{\nu+m}(t) dt,$$

значение которого было найдено в примере 13.

Если  $\nu = \pm(m-1), \pm(m-3), \pm(m-5), \dots$ , то коэффициент при последнем интеграле оказывается равным нулю, и исходный интеграл выражается в замкнутой форме через цилиндрические функции.

16. Показать, что при условии  $R(\mu) > -\frac{1}{2}$ ,  $R(\nu - \mu) > -1$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)}{x^\mu} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right)}{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right)}$$

(Ватсон [1], стр. 428—429).

17. Доказать формулу

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx) dx = \frac{[\sqrt{a^2 + b^2} - a]^\nu}{b^\nu \sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$R(\nu) > -1; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

18. Показать, что функция Бесселя нулевого порядка удовлетворяет интегральному уравнению

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x+y)}{x+y} J_0(y) dy, \quad 0 \leq x < \infty.$$

19. Интегральная функция Бесселя порядка  $\nu$  определяется при помощи равенства

$$J_{\nu}(z) = \int_{\infty}^z \frac{J_{\nu}(t)}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi.$$

Показать, что  $J_{\nu}(z)$  — целая функция  $\nu$  и регулярная функция  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  (при  $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$  — целая функция  $z$ ). Вывести формулы:

$$\nu J_{\nu}(z) = \nu \int_0^z \frac{J_{\nu}(t)}{t} dt - 1,$$

$$\nu J_{\nu}(z) = \int_0^z J_{\nu-1}(t) dt - J_{\nu}(t) - 1,$$

$$R(\nu) > 0, \quad |\arg z| < \pi.$$

Указание. Воспользоваться результатами примеров 16 и 14.

20. Получить разложения интегральных функций Бесселя в степенные ряды:

$$J_0(z) = \ln \frac{z}{2} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(2k) k!^2},$$

$$|z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi;$$

$$J_n(z) = -\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{(2k+n) k! (n+k)!};$$

$$|z| < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Указание. Подставить разложение (5.3.1) в первую из формул примера 19.

21. Вывести асимптотическую формулу

$$J_{\nu}(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ V

Ватсон [1]; Кузьмин Р. О. [1]; Смирнов В. И. [1]; Грэй и Метьюз [1]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], [2]; Курант и Гильберт [1]; Уиттекер и Ватсон [1].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].



## ГЛАВА VI

# ПРИЛОЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### § 6.1. Введение

Как уже упоминалось (§ 5.1), цилиндрические функции имеют весьма широкую область применения в математической физике и технике, охватить которую, даже в самых общих чертах, в рамках данной книги не представляется возможным.

Настоящая глава посвящена приложениям цилиндрических функций к некоторым проблемам математической физики, причем выбор задач рассчитан главным образом на то, чтобы иллюстрировать различные стороны применения аппарата цилиндрических функций, и не претендует на сколько-нибудь полное освещение вопросов, относящихся по своему содержанию к курсам математической физики.

Наиболее подробно изложен раздел о решении краевых задач теории потенциала для некоторых областей специального вида, в который, наряду с элементарными примерами, включены также проблемы более сложного характера, как, например, задача Дирихле для клиновидной области (§ 6.5).

Вместе с тем мы сочли возможным не помещать задач, относящихся к наиболее простым приложениям цилиндрических функций, составляющих содержание соответствующих разделов элементарных курсов математической физики, к которым мы отсылаем читателя, впервые приступившего к изучению данного круга вопросов.

### § 6.2. Разделение переменных в уравнении

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu$$

в цилиндрической системе координат

Источником для разнообразных приложений цилиндрических функций к задачам математической физики служит применение метода частных решений к уравнению

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu \quad (6.2.1)$$

( $\Delta u$  — оператор Лапласа,  $t$  — время,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — заданные постоянные), частными случаями которого являются дифференциальные уравнения теории упругих колебаний, электродинамики, теории теплопроводности и т. д.

В тех случаях, когда по характеру граничных условий, наложенных на функцию  $u$ , целесообразно использовать систему цилиндрических координат  $(r, z, \varphi)$ , связанных с прямоугольными координатами  $(x, y, z)$  соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z \\ (0 \leq r < \infty, & -\pi < \varphi \leq \pi, & -\infty < z < \infty), \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu \quad (6.2.3)$$

и допускает бесконечное множество решений в форме произведения множителей, каждый из которых зависит от одного переменного

$$u = R(r) Z(z) \Phi(\varphi) T(t). \quad (6.2.4)$$

Подставляя (6.2.4) в (6.2.3) и разделив на  $RZ\Phi T$ , находим

$$\frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} rR' + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} - c = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{a^2} T'' + bT \right].$$

Вследствие независимости переменных, обе стороны полученного уравнения должны равняться некоторой постоянной, которую удобно обозначить через  $(-\chi^2)$ .

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{1}{a^2} T'' + bT' + \chi^2 T = 0 \quad (6.2.5)$$

и

$$\frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} rR' + \chi^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = c - \frac{Z''}{Z}.$$

В свою очередь, из последнего равенства вытекает, что каждая из сторон есть постоянная, которую мы положим равной  $(-\lambda^2)$ , откуда получаем:

$$\begin{aligned} Z'' - (\lambda^2 + c) Z &= 0, \\ r^2 \left[ \frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} rR' + (\lambda^2 + \chi^2) \right] &= - \frac{\Phi''}{\Phi}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Обозначая новую постоянную через  $\mu^2$ , находим:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (6.2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \left( \lambda^2 + \chi^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (6.2.8)$$

Таким образом, процесс разделения переменных приводит к бесконечной совокупности решений вида (6.2.4), зависящих от трех параметров  $(x, \lambda, \mu)$ , которые могут принимать вещественные или комплексные значения\*).

Определение множителей в произведении (6.2.4) сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (6.2.5—8), первые три из которых могут быть решены в элементарных функциях, а последнее при помощи введения нового переменного, пропорционального  $r$ , приводится к уравнению Бесселя (5.1.1), интегрируемому в цилиндрических функциях.

Решение задач математической физики получается путем суперпозиции найденных частных решений, причем выбор допустимых значений параметров  $(x, \lambda, \mu)$  и соответствующих им интегралов уравнений (6.2.5—8) производится согласно конкретным условиям рассматриваемой проблемы (§ 6.3—7).

Отметим некоторые результаты, относящиеся к разделению переменных в уравнениях частного вида, получающихся из (6.2.1) при специальных значениях постоянных  $a, b$  и  $c$ .

(I). Уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ .

Это уравнение допускает частные решения вида

$$u = R(r) Z(z) \Phi(\varphi), \quad (6.2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r R' + \left( \lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R &= 0; \\ Z'' - \lambda^2 Z &= 0; \quad \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0. \end{aligned}$$

В частном случае, когда по условиям задачи  $u$  не зависит от координаты  $\varphi$ , получаем:

$$u = R(r) Z(z), \quad (6.2.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r R' + \lambda^2 R = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

(II). Уравнение Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$ .

Применение метода разделения переменных приводит к совокупности частных решений вида

$$u = R(r) Z(z) \Phi(\varphi), \quad (6.2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r R' + \left( \lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R &= 0, \\ Z'' - (\lambda^2 - k^2) Z &= 0, \quad \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0. \end{aligned}$$

\*) Не ограничивая общности, можно считать, что каждый из параметров принадлежит произвольно выбранной полуплоскости, так как изменение знака не сказывается на значении постоянных разделения  $\lambda^2, \lambda^2$  и  $\mu^2$ .

### § 6.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для цилиндра. Пример из теории теплопроводности

Важный класс задач математической физики составляют краевые задачи теории потенциала, которые заключаются в определении функции  $u$ , гармонической в некоторой трехмерной области ( $\tau$ ), удовлетворяющей на ее границе условию одного из трех типов:

$$(I) u \Big|_{\sigma} = f; \quad (II) \frac{du}{dn} \Big|_{\sigma} = f; \quad (III) \frac{du}{dn} + hu \Big|_{\sigma} = f, \quad (6.3.1)$$

где  $f$  — заданная функция точки на поверхности ( $\sigma$ ),  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности\*).

В качестве простого примера укажем на задачу об отыскании стационарного распределения температуры в теле заданной формы по известному распределению температуры на его поверхности, которая эквивалентна первой краевой задаче, соответствующей условию вида (I), а также на многочисленные задачи электростатики, магнитостатики и т. д.

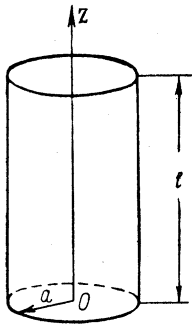


Рис. 18.

В том случае, когда область ( $\tau$ ) представляет собой цилиндр, краевые задачи могут быть решены при помощи метода разделения переменных, если предположить, что функция равна нулю на боковой поверхности цилиндра или на его торцах. Общий случай произвольных граничных условий первого рода может быть сведен к этим частным случаям путем разложения задачи на две вспомогательные, с граничными условиями указанного специального вида\*\*).

Введем систему цилиндрических координат ( $r, z, \varphi$ ), ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра, а начало координат лежит в плоскости одного из торцов (рис. 18), и предположим, для определенности, что мы имеем дело с первой краевой задачей.

\*) Функция  $u = u(x, y, z)$  называется гармонической в области ( $\tau$ ), если она непрерывна в этой области вместе с производными первых двух порядков по ( $x, y, z$ ) и удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ . По поводу формулировок краевых задач см., например, В. И. Смирнов [2], гл. IV, § 2, а также § 8.1 настоящей книги.

\*\*\*) Решение представляется в виде суммы двух гармонических функций, одна из которых удовлетворяет граничным условиям (а), другая — условиям (б).

Следует заметить, что в общем случае неоднородных граничных условий для решения задачи, вместо метода частных решений, целесообразно пользоваться методом Гринберга (Г. А. Гринберг [1]), устраняющим необходимость в таком приведении, которое во многих случаях является причиной излишне сложной формы решения.

В соответствии с замечанием, сделанным выше, достаточно ограничиться рассмотрением двух частных случаев, когда граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad u|_{r=a} &= 0, \quad u|_{z=0} = f_0, \quad u|_{z=l} = f_l; \\ \text{(б)} \quad u|_{r=a} &= F, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0. \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Для упрощения предположим, что граничные условия не содержат переменной  $\varphi$ , т. е.  $f_0 = f_0(r)$ ,  $f_l = f_l(r)$  и  $F = F(z)$ . Искомая функция  $u$  тогда также не будет зависеть от  $\varphi$ , поэтому, согласно § 6.2, частные решения уравнения Лапласа могут быть представлены в форме  $u = R(r)Z(z)$ , где множители суть интегралы дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \lambda^2 R = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0. \quad (6.3.3)$$

Выполнив интегрирование, находим:

$$R = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r), \quad Z = C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z; \quad (6.3.4)$$

$J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  — функции Бесселя первого и второго рода.

Предположим, что граничные условия имеют вид (а). Так как  $J_0(\lambda r) \rightarrow 1$ ,  $Y_0(\lambda r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , мы должны для ограниченности решения на оси цилиндра положить  $B = 0$ , после чего из однородного граничного условия следует  $AJ_0(\lambda a) = 0$ , откуда определяются допустимые значения параметра  $\lambda$ :  $\lambda = \lambda_n = \frac{x_n}{a}$ , где  $x_n$  — положительные нули функции Бесселя  $J_0(x)$  (§ 5.13).

Таким образом, получаем следующую совокупность частных решений уравнения Лапласа:

$$u = u_n = \left[ M_n \operatorname{ch} \frac{x_n z}{a} + N_n \operatorname{sh} \frac{x_n z}{a} \right] J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.3.5)$$

из которых, путем их суперпозиции, может быть построено решение рассматриваемой задачи. Действительно, предположим, что каждая из функций  $f_0(r)$  и  $f_l(r)$  может быть разложена в ряд Фурье — Бесселя (§ 5.14)

$$\left. \begin{aligned} f_0(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_0)_n J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right), \\ f_l(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_l)_n J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.3.6)$$

где

$$(f)_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a f(r) r J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right) dr, \quad (6.3.7)$$

и рассмотрим ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (f_0)_n \frac{\operatorname{sh} x_n \frac{l-z}{a}}{\operatorname{sh} x_n \frac{l}{a}} + (f_l)_n \frac{\operatorname{sh} x_n \frac{z}{a}}{\operatorname{sh} x_n \frac{l}{a}} \right] J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right), \quad (6.3.8)$$

составленный из членов вида (6.3.5). Тогда граничные условия будут удовлетворены, и ряд (6.3.8) дает решение поставленной задачи\*).

В случае граничных условий типа (б) для того, чтобы удовлетворить однородным граничным условиям, необходимо положить  $C = 0$  и выбрать  $\lambda$  чисто мнимым числом, равным  $\frac{n\pi i}{l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Интегралы уравнений (6.3.3) принимают в этом случае вид:

$$\begin{aligned} R &= A I_0 \left( \frac{n\pi}{l} r \right) + B K_0 \left( \frac{n\pi}{l} r \right), \\ Z &= D \sin \frac{n\pi z}{l}, \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

где  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  — цилиндрические функции мнимого аргумента (§ 5.7).

Так как  $K_0 \left( \frac{n\pi r}{l} \right) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , следует принять  $B = 0$ ; следовательно, подходящая система частных решений уравнения Лапласа будет

$$u = u_n = M_n I_0 \left( \frac{n\pi r}{l} \right) \sin \frac{n\pi z}{l}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3.10)$$

Искомое решение может быть построено в форме ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{I_0 \left( \frac{n\pi r}{l} \right)}{I_0 \left( \frac{n\pi a}{l} \right)} \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (6.3.11)$$

где  $F_n$  — коэффициенты Фурье в разложении функции  $F(z)$  в ряд по  $\sin \frac{n\pi z}{l}$ :

$$F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (6.3.12)$$

Решение краевых задач с граничными условиями других типов получается аналогичным образом, причем подходящим аппаратом, заменяющим ряды Фурье — Бесселя, являются в этом случае ряды Дини (§ 5.14).

\*) Речь идет о формальном решении, которое нуждается еще в последующей проверке.

Обобщение на случай граничных условий, содержащих зависимость от угловой координаты  $\varphi$ , достигается путем построения совокупности частных решений уравнения Лапласа вида (6.2.9).

Значение параметра  $\mu$  определяется при этом из условия непрерывности

$$u|_{\varphi=-\pi} = u|_{\varphi=\pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}, \quad (6.3.13)$$

которое равносильно требованию периодичности решения относительно  $\varphi$  и дает  $\mu = m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Дальнейший анализ отличается от выполненного только незначительными деталями и приводит к следующим частным решениям уравнения Лапласа:

$$u = u_{m,n} = \left[ M_{m,n} \operatorname{ch} \frac{x_{mn}z}{a} + N_{m,n} \operatorname{sh} \frac{x_{mn}z}{a} \right] J_m \left( x_{mn} \frac{r}{a} \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \quad (6.3.14)$$

$$u = u_{m,n} = M_{m,n} I_m \left( \frac{n\pi r}{l} \right) \sin \frac{n\pi z}{l} \cdot \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \quad (6.3.15)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$  и  $x_{mn}$  — положительные нули функции Бесселя  $J_m(x)$ .

Решение краевых задач с граничными условиями (6.3.2) получается суперпозицией найденных частных решений в форме двойных рядов, коэффициенты которых определяются путем разложения функций  $f_0 = f_0(r, \varphi)$ ,  $f_l = f_l(r, \varphi)$  и  $F = F(z, \varphi)$  в ряды соответствующего типа.

В виде простого примера, иллюстрирующего изложенную выше методику, дадим решение задачи о распределении температуры в цилиндре, один торец которого имеет температуру  $u_0$ , а остальная поверхность поддерживается при нулевой температуре. Искомое решение получается непосредственно из (6.3.8), если положить  $f_0 = u_0$ ,  $f_l = 0$ , откуда, если воспользоваться для вычисления интеграла (6.3.7) формулой (5.3.6), следует

$$u = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x_n \frac{l-z}{a}}{\operatorname{sh} x_n \frac{l}{a}} \cdot \frac{J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right)}{x_n J_1(x_n)}. \quad (6.3.16)$$

#### § 6.4. Краевая задача для области, ограниченной двумя параллельными плоскостями

Метод частных решений позволяет получить также решение краевых задач теории потенциала для области, представляющей собой слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями (рис. 19):

Рассмотрим в качестве примера первую краевую задачу и ограничимся случаем симметрии вращения, когда функции  $f_0$  и  $f_l$  в граничных условиях

$$u|_{z=0} = f_0, \quad u|_{z=l} = f_l \quad (6.4.1)$$

зависят только от переменного  $r$ .

Искомая функция  $u = u(r, z)$ , гармоническая в области  $0 < z < l$  и удовлетворяющая условиям (6.4.1), может быть построена из частных решений уравнения Лапласа вида

$$u = u_\lambda = [M_\lambda \operatorname{ch} \lambda z + N_\lambda \operatorname{sh} \lambda z] J_0(\lambda r) \quad (0 \leq \lambda < \infty) \quad (6.4.2)$$

путем интегрирования их по параметру  $\lambda$ .

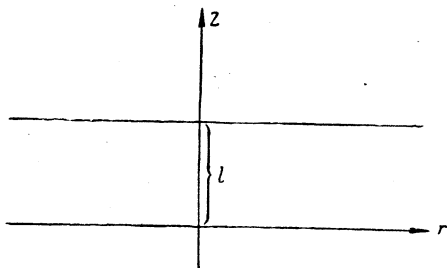


Рис. 19.

Предполагая, что граничные функции допускают представление с помощью интеграла Фурье—Бесселя (5.14.10), мы получаем формальное решение задачи в виде

$$u = \int_0^\infty \left[ (f_0)_\lambda \frac{\operatorname{sh} \lambda (l-z)}{\operatorname{sh} \lambda l} + (f_l)_\lambda \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda l} \right] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (6.4.3)$$

где

$$(f)_\lambda = \lambda \int_0^\infty f(r) r J_0(\lambda r) dr. \quad (6.4.4)$$

Аналогичным образом может быть найдено решение соответствующей краевой задачи для полуплоскости  $z > 0$ . Если граничное условие имеет вид  $u|_{z=0} = f(r)$ , то искомое решение будет

$$u = \int_0^\infty (f)_\lambda e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (6.4.5)$$



### § 6.5. Краевая задача для клиновидной области

Еще один вид области, для которой краевые задачи теории потенциала могут быть решены методом частных решений с использованием аппарата цилиндрических функций, представляет собой клиновидная область, ограниченная двумя пересекающимися плоскостями (рис. 20).

Чтобы получить совокупность частных решений уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$ , подходящих для рассмотрения данного класса задач, введем систему цилиндрических координат, ось  $z$  которой совпадает с линией пересечения плоскостей, и положим в (6.2.9)  $\lambda = i\sigma$ ,  $\mu = i\tau$ , где  $\sigma$  и  $\tau$  изменяются в промежутке  $(0, \infty)$ . Интегралы рассматриваемых уравнений тогда будут:

$$R = AI_{i\tau}(\sigma r) + BK_{i\tau}(\sigma r),$$

$$\Phi = C \operatorname{ch} \tau\varphi + D \operatorname{sh} \tau\varphi,$$

$$Z = E \cos \sigma z + F \sin \sigma z;$$

$I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  — цилиндрические функции мнимого аргумента (§ 5.7);  $A, B, \dots, F$  — произвольные постоянные.

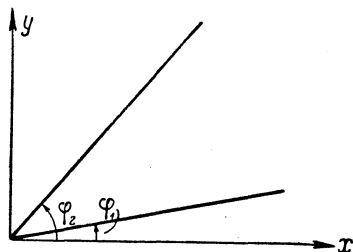


Рис. 20.

Принимая во внимание асимптотический характер поведения функций  $I_{i\tau}(\sigma r)$  и  $K_{i\tau}(\sigma r)$  при  $r \rightarrow \infty$ , мы должны выбрать  $A = 0$ , что приводит к следующей совокупности решений:

$$u = u_{\sigma, \tau} = [M_{\sigma, \tau} \operatorname{ch} \tau\varphi + N_{\sigma, \tau} \operatorname{sh} \tau\varphi] K_{i\tau}(\sigma r) \frac{\cos \sigma z}{\sin \sigma z}, \quad (6.5.1)$$

$$0 \leq \sigma < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

Полученная система пригодна для решения краевой задачи первого рода в случае клиновидной области, ограниченной плоскостями  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$  \*).

Примем для упрощения рассуждений, что функции  $f_p = f_p(r, z)$  в граничных условиях

$$u|_{\varphi=\varphi_p} = f_p, \quad u = 1, 2, \quad (6.5.2)$$

а следовательно, и искомое решение  $u = u(r, z, \varphi)$  суть четные функции переменного  $z$  \*\*).

\*) Условимся таким образом приписывать индексы у  $\varphi_p$ , чтобы рассматриваемой области соответствовал промежуток  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ .

\*\*\*) Случай, когда  $f_p$  — нечетные функции  $z$ , исследуется совершенно аналогичным образом, а общий случай приводится к рассмотренному путем разложения задачи на две с четными и нечетными граничными условиями

$$u|_{\varphi=\varphi_p} = \frac{1}{2} [f_p(r, z) \pm f_p(r, -z)].$$

Допуская, что каждая из функций  $f_p$  разлагается в промежутке  $(-\infty, \infty)$  в интеграл Фурье

$$f_p = f_p(r, z) = \int_0^{\infty} (f_p)_\sigma \cos \sigma z \, d\sigma, \quad (6.5.3)$$

где

$$(f_p)_\sigma = g_p(\sigma, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_p \cos \sigma z \, dz, \quad (6.5.4)$$

мы будем искать решение рассматриваемой задачи в виде двойного интеграла

$$u = \int_0^{\infty} \cos \sigma z \, d\sigma \int_0^{\infty} \left[ G_1(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \tau (\varphi_2 - \varphi)}{\operatorname{sh} \tau (\varphi_2 - \varphi_1)} + \right. \\ \left. + G_2(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \tau (\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{sh} \tau (\varphi_2 - \varphi_1)} \right] K_{i\tau}(\sigma r) \, d\tau, \quad (6.5.5)$$

образованного из выражений типа (6.5.1) путем интегрирования по параметрам  $(\sigma, \tau)$ .

Для определения функций  $G_p(\sigma, \tau)$  получаем тогда соотношения

$$g_p(\sigma, r) = \int_0^{\infty} G_p(\sigma, \tau) K_{i\tau}(\sigma r) \, d\tau, \quad 0 < r < \infty, \quad (6.5.6)$$

откуда можно найти эти функции, если разложить левую сторону равенств (6.5.6) в интеграл по функциям  $K_{i\tau}(\sigma r)$ .

В ряде случаев требуемое разложение может быть выполнено с помощью формулы (5.14.13), которая, если положить  $x = \sigma r$ ,  $\xi = \sigma r$ ,  $f(x) x^{1/2} = g(\sigma, r)$  принимает вид

$$g(\sigma, r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{i\tau}(\sigma r) \, d\tau \int_0^{\infty} g(\sigma, \rho) \frac{K_{i\tau}(\sigma \rho)}{\rho} \, d\rho. \quad (6.5.7)$$

Теорема разложения (6.5.7) справедлива, если  $g(\sigma, r)$ , рассматриваемая как функция переменного  $r$ , есть непрерывная функция с ограниченной вариацией во всяком промежутке  $0 < a \leq r \leq b < \infty$ , и интегралы

$$(a) \int_0^{1/2} |g(\sigma, r)| r^{-1} \ln \frac{1}{r} \, dr; \quad (б) \int_{1/2}^{\infty} |g(\sigma, r)| r^{-1/2} \, dr \quad (6.5.8)$$

имеют конечное значение.

При условии, что функции  $g_p(\sigma, r)$  принадлежат к рассматриваемому классу функций, сравнение (6.5.6) и (6.5.7) дает:

$$C_p(\sigma, \tau) = \frac{2}{\pi^2} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^{\infty} g_p(\sigma, r) \frac{K_{i\tau}(\sigma r)}{r} dr, \quad (6.5.9)$$

и формула (6.5.5) доставляет формальное решение задачи. Однако во многих случаях условие (а) оказывается невыполненным, так как  $g_p(\sigma, r)$  при  $r \rightarrow 0$  стремится к пределу  $g_p(\sigma, 0)$ , вообще говоря, отличному от нуля.

Чтобы обойти это затруднение, положим в этом случае

$$g_p^*(\sigma, r) = g_p(\sigma, r) - g_p(\sigma, 0) e^{-\sigma r} \quad (6.5.10)$$

и допустим, что, как это обычно имеет место в проблемах физического характера, условия применимости формулы (6.5.7) выполнены для функции  $g_p^*(\sigma, r)$ . Мы имеем тогда по предыдущему

$$g_p^*(\sigma, r) = \int_0^{\infty} G_p^*(\sigma, \tau) K_{i\tau}(\sigma r) d\tau, \quad (6.5.11)$$

где

$$G_p^*(\sigma, \tau) = \frac{2}{\pi^2} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^{\infty} g_p^*(\sigma, r) \frac{K_{i\tau}(\sigma r)}{r} dr. \quad (6.5.12)$$

С другой стороны, легко доказать формулу \*)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{i\tau}(x) d\tau = e^{-x}, \quad x > 0, \quad (6.5.13)$$

откуда следует

$$g_p(\sigma, 0) e^{-\sigma r} = \frac{2}{\pi} g_p(\sigma, 0) \int_0^{\infty} K_{i\tau}(\sigma r) d\tau. \quad (6.5.14)$$

Складывая (6.5.11) и (6.5.14), мы получим искомое представление функции  $g_p(\sigma, r)$  в виде интеграла по функциям  $K_{i\tau}(\sigma r)$ , сопоставление

---

\*) Если разложить функцию  $\omega(\alpha) = e^{-x \operatorname{ch} \alpha}$  в интеграл Фурье по  $\cos \tau \alpha$ , то, воспользовавшись (5.10.23), находим

$$e^{-x \operatorname{ch} \alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{i\tau}(x) \cos \tau \alpha d\tau \quad (x > 0),$$

и требуемый результат получается, если положить  $\alpha = 0$ .

которого с (6.5.6) приводит к следующему значению коэффициентов  $G_p(\sigma, \tau)$ :

$$G_p(\sigma, \tau) = G_p^*(\sigma, \tau) + \frac{2}{\pi} g_p(\sigma, 0). \quad (6.5.15)$$

Решение задачи, как и выше, дается формулой (6.5.5).

### § 6.6. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного вблизи края тонкой проводящей плоскости

В виде примера на приложение метода, изложенного в § 6.5, дадим решение задачи о поле точечного заряда  $q$ , помещенного вблизи прямолинейного края тонкой проводящей пластинки, находящейся при нулевом потенциале.

Чтобы не усложнять вычислений, ограничимся рассмотрением частного случая, когда заряд  $q$  расположен в точке  $A$ , лежащей в той же плоскости, что и проводящая пластинка.

Если выбрать систему координат таким образом, чтобы ось  $z$  совпадала с краем пластинки, а ось  $x$  проходила через точку  $A$

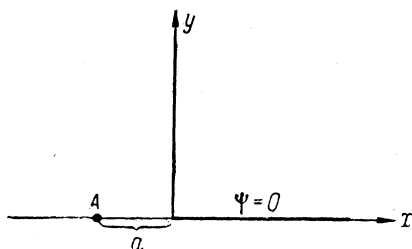


Рис. 21.

(рис. 21), и представить потенциал электростатического поля  $\psi$  в виде суммы потенциалов первичного и индуцированного зарядов:

$$\psi = \psi_0 + u, \quad \psi_0 = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}}, \quad (6.6.1)$$

то рассматриваемая задача сводится к частному случаю общей проблемы § 6.5, соответствующему значениям:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi, \quad f_1(r, z) = f_2(r, z) = -\frac{q}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}}. \quad (6.6.2)$$

Воспользовавшись интегральным представлением примера 6 (2) упражнений к гл. V, получаем

$$(f_p)_\sigma = g_p(\sigma, r) = -\frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \sigma z}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}} dz = -\frac{2q}{\pi} K_0(\sigma(r+a)), \quad (6.6.3)$$

где  $K_0(x)$  — функция Макдональда.

В рассматриваемом случае  $g_p(\sigma, 0) = -\frac{2q}{\pi} K_0(\sigma a)$ , поэтому, в соответствии с изложенной выше методикой, необходимо предва-

нительно найти значения величин:

$$G_p^*(\sigma, \tau) = -\frac{4q}{\pi^3} \tau \operatorname{sh} \pi\tau \int_0^\infty \frac{K_0(\sigma(r+a)) - K_0(\sigma a) e^{-\sigma r}}{r} K_{i\tau}(\sigma r) dr. \quad (6.6.4)$$

Так как вычисление интеграла довольно сложно, приведем лишь его результат:

$$G_p^*(\sigma, \tau) = \frac{4q}{\pi^2} [K_0(\sigma a) - K_{i\tau}(\sigma a)]. \quad (6.6.5)$$

Подставляя (6.6.5) в (6.5.15), получаем

$$G_p(\sigma, \tau) = -\frac{4q}{\pi^2} K_{i\tau}(\sigma a), \quad (6.6.6)$$

и формула (6.5.5) дает

$$u = -\frac{4q}{\pi^2} \int_0^\infty \cos \sigma z d\sigma \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \tau (\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} \pi\tau} K_{i\tau}(\sigma a) K_{i\tau}(\sigma r) d\tau. \quad (6.6.7)$$

Интеграл (6.6.7) может быть выражен в замкнутой форме через элементарные функции\*). Окончательный результат вычисления имеет вид

$$u = -\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}} \times \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{ar} \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}} \right), \quad (6.6.8)$$

откуда следует

$$\psi = \frac{2q}{\pi \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}} \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{ar} \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}}. \quad (6.6.9)$$

Плотность распределения заряда по поверхности пластинки определяется равенством

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_s = -\frac{q}{2\pi^2} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{(r+a)^2 + z^2}. \quad (6.6.10)$$

\*) Заметим, что в рассматриваемом случае решение задачи (6.6.7) может быть получено без применения общего аппарата разложения в интеграл по функциям  $K_{i\tau}(\sigma r)$ , если воспользоваться формулой

$$K_0(\sigma(r+a)) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_{i\tau}(\sigma a) K_{i\tau}(\sigma r) d\tau.$$

### § 6.7. Приложение к теории теплопроводности. Задача об охлаждении цилиндра

В качестве примера приложения цилиндрических функций к нестационарным задачам математической физики рассмотрим задачу об охлаждении бесконечно длинного цилиндра радиуса  $a$ , нагретого до температуры  $u_0 = f(r)$  ( $r$  — расстояние от оси цилиндра) и излучающего тепло в окружающую среду, находящуюся при нулевой температуре. С математической точки зрения задача приводится к интегрированию уравнения теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \quad (6.7.1)$$

( $c$ ,  $\rho$ ,  $k$  — теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности вещества),

при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(r) \quad (6.7.2)$$

и граничном условии

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \lambda u \Big|_{r=a} \quad (6.7.3)$$

( $\lambda$  — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду).

Если, следуя методу Фурье, искать частные решения уравнения (6.7.1) вида  $u = R(r)T(t)$ , то для определения множителей получаются уравнения

$$bT' + \chi^2 T = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \chi^2 R = 0 \quad \left( b = \frac{c\rho}{k} \right),$$

откуда следует:

$$R = AJ_0(\chi r) + BY_0(\chi r), \quad T = Ce^{-\frac{\chi^2}{b}t}.$$

Так как при  $r \rightarrow 0$   $J_0(\chi r) \rightarrow 1$ ,  $Y_0(\chi r) \rightarrow \infty$ , то для ограниченности решения на оси цилиндра необходимо положить  $B = 0$ , после чего из условия (6.7.3) вытекает, что параметр  $\chi$  должен быть выбран таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение

$$hJ_0(\chi a) - \chi J_1(\chi a) = 0,$$

где  $h = \frac{\lambda}{k}$ .

Если положить  $\chi a = x$ , то последнее уравнение приводится к виду

$$haJ_0(x) - xJ_1(x) = 0, \quad (6.7.4)$$

откуда следует, что оно имеет только вещественные корни, расположенные симметрично относительно начала координат (§ 5.13).

Обозначая положительные корни уравнения (6.7.4) через  $x_n$  ( $0 < x_1 < x_2 < \dots$ ), получаем, что допустимые значения параметра  $x$  будут  $x_n = \frac{x_n}{a}$  и, таким образом, совокупность частных решений уравнения (6.7.1), пригодных для рассмотрения данной задачи, имеет вид

$$u = u_n = M_n e^{-\frac{x_n^2}{a^2 b} t} J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.7.5)$$

Суммируя найденные решения, находим

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-\frac{x_n^2}{a^2 b} t} J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right), \quad (6.7.6)$$

где, в соответствии с начальным условием (6.7.2), коэффициенты  $M_n$  должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялось равенство

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right) \quad (0 \leq r < a). \quad (6.7.7)$$

Последняя задача равносильна задаче разложения функции  $f(r)$  в ряд Дини, и ее решение может быть получено из общих формул § 5.14. Воспользовавшись этими формулами, находим

$$M_n = \frac{2}{a^2 [J_0^2(x_n) + J_1^2(x_n)]} \int_0^a r f(r) J_0 \left( x_n \frac{r}{a} \right) dr, \quad (6.7.8)$$

и решение рассматриваемой проблемы теории теплопроводности представляется рядом (6.7.6).

## § 6.8. Приложение к теории дифракции

Как пример на приложение цилиндрических функций третьего рода рассмотрим задачу о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на бесконечно длинный проводящий цилиндр радиуса  $a$ .

Пусть  $(r, z, \varphi)$  будет система цилиндрических координат, ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра, и отсчет угла  $\varphi$  ведется от направления, вдоль которого распространяется волна.

В предположении, что зависимость от времени характеризуется множителем  $e^{i\omega t}$  ( $\omega$  — частота колебаний) и вектор электрического

поля в падающей и отраженной волне параллелен оси цилиндра, рассматриваемая задача приводится к определению комплексной амплитуды вторичного поля  $E$ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0, \quad (6.8.1)$$

граничному условию

$$E|_{r=a} + E_0 e^{-ika \cos \varphi} = 0 \quad (6.8.2)$$

и условию излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + ikE \right) \sqrt{r} = 0, \quad \sqrt{r} E = O(1). \quad (6.8.3)$$

Здесь  $k = \frac{\omega}{c}$  — волновое число,  $E_0$  — амплитуда падающей плоской волны.

Применяя метод разделения переменных, находим, что частные решения уравнения (6.8.1), периодические относительно координаты  $\varphi$ , будут

$$E = E_n = [M_n H_n^{(1)}(kr) + N_n H_n^{(2)}(kr)]_{\sin n\varphi}^{\cos n\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8.4)$$

где  $H_n^{(1), (2)}(kr)$  — функции Ханкеля первого и второго рода (§ 5.6).

Из условия симметрии следует, что  $E$  — четная функция от  $\varphi$ , поэтому достаточно ограничиться решениями, содержащими  $\cos n\varphi$ . Далее, для того чтобы удовлетворить принципу излучения, надлежит, принимая во внимание асимптотическое поведение функций Ханкеля на бесконечности (§ 5.11), положить  $M_n = 0$ . Таким образом, решение задачи следует искать в форме

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} N_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi. \quad (6.8.5)$$

Из граничного условия (6.8.2) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n H_n^{(2)}(ka) \cos n\varphi + E_0 e^{-ika \cos \varphi} = 0. \quad (6.8.6)$$

Если положить в (5.3.4)  $z = ka$ ,  $t = -ie^{i\varphi}$ , то получим:

$$e^{-ika \cos \varphi} = J_0(ka) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) \cos n\varphi, \quad (6.8.7)$$



откуда следует:

$$N_0 H_0^{(2)}(ka) = -E_0 J_0(ka), \quad N_n H_n^{(2)}(ka) = -2E_0 (-i)^n J_n(ka),$$

и искомое решение дается формулой

$$E = -E_0 \left[ \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \right]. \quad (6.8.8)$$

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI

Кузьмин Р. О. [1]; Левин В. И. и Гросберг Ю. И. [1]; Тихонов А. Н. и Самарский А. А. [1]; Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. [1]; Грей и Метьюз [1]; Франк и Мизес [1]; Бейтман [1]; Джефрис Х. и Джефрис Б. [1]; Снеддон [1]; Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. [1].

---

## ГЛАВА VII

### СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

#### § 7.1. Введение

Сферическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right] u = 0, \quad (7.1.1)$$

где  $z$  — комплексное переменное,  $\mu$  и  $\nu$  — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

Уравнение (7.1.1) встречается в математической физике в связи с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат — сферических, сфероидальных, тороидальных и др., которые применяются при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида. Простейшими среди них являются краевые задачи для сферической области, что служит основанием для того, чтобы называть рассматриваемый класс функций сферическими или шаровыми функциями. В этом случае переменное  $z$  принимает вещественные значения, принадлежащие промежутку  $(-1, +1)$ , а параметры  $\mu$  и  $\nu$  имеют целые положительные значения; однако рассмотрение краевых задач математической физики для областей другого вида требует изучения сферических функций при достаточно общих предположениях относительно области изменения переменных  $z$ ,  $\mu$  и  $\nu$ \*). Для большинства приложений является достаточной теория сферических функций, построенная в предположении, что  $z$  — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом вдоль отрезка вещественной оси  $(-\infty, 1)$ , или вещественно и принадлежит промежутку  $(-1, 1)$ ,  $\nu$  — произвольное вещественное или комплексное число и  $\mu = m$  — целое положительное число ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Указанные ограничения приняты в настоящей книге. Более общее исследование читатель может найти в мо-

---

\*) См. гл. VIII, где даны примеры задач, в которых переменное  $z$  и параметры  $\mu$  и  $\nu$  принимают различные вещественные или комплексные значения.

нографиях Гобсона [1], Робена [1], Лензе [1] и других работах, посвященных теории сферических функций, краткий список которых приведен в конце главы.

## § 7.2. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение и его решение с помощью рядов

Прежде чем приступить к изложению теории сферических функций, целесообразно рассмотреть вопрос об интегрировании линейного дифференциального уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0, \quad (7.2.1)$$

где  $z$  — комплексное переменное,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — параметры, которые могут иметь различные вещественные или комплексные значения.

Уравнение (7.2.1) называется гипергеометрическим и включает, как частные случаи, многие дифференциальные уравнения, встречающиеся в приложениях.

Если привести уравнение (7.2.1) к стандартной форме, разделив его на коэффициент при второй производной, то коэффициенты полученного уравнения будут регулярными функциями переменного  $z$  в области  $0 < |z| < 1$ , имеющими при  $z=0$  полюс первого порядка или обыкновенную точку, в зависимости от значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что в таком случае рассматриваемое уравнение должно иметь частное решение вида

$$u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad (7.2.2)$$

где  $s$  — надлежаще выбранное число,  $c_0 \neq 0$ , степенной ряд сходится при  $|z| < 1$  \*).

Подставляя (7.2.2) в уравнение (7.2.1), находим после простых вычислений

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{s+k-1} (s+k)(s+k-1+\gamma) - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{s+k} (s+k+\alpha)(s+k+\beta) = 0, \end{aligned}$$

откуда для определения показателя  $s$  и коэффициентов  $c_k$  получается

\*) См., например, В. И. Смирнов [1], § 98.

система уравнений:

$$\begin{aligned} c_0 s(s-1+\gamma) &= 0, \\ c_k(s+k)(s+k-1+\gamma) - c_{k-1}(s+k-1+\alpha)(s+k-1+\beta) &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

первое из которых дает  $s=0$  или  $s=1-\gamma$ .

Предположим, что  $\gamma$  не является нулем или целым отрицательным числом ( $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ), и выберем  $s=0$ . Тогда для вычисления коэффициентов  $c_k$  получим рекуррентное соотношение

$$c_k = \frac{(k-1+\alpha)(k-1+\beta)}{k(k-1+\gamma)} c_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

откуда, если принять  $c_0=1$ , следует

$$c_k = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1), \quad (\lambda)_0 = 1, \quad k=1, 2, \dots \quad (7.2.3)$$

Таким образом, частное решение уравнения (7.2.1) при  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$  будет \*)

$$u = u_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k, \quad |z| < 1. \quad (7.2.4)$$

Ряд (7.2.4) называется гипергеометрическим рядом. Сходимость этого ряда при  $|z| < 1$  следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений. Если воспользоваться признаком Даламбера, то независимо от упомянутой теории легко доказать, что радиус сходимости ряда (7.2.4) равен единице, за исключением единственного случая, когда один из параметров ( $\alpha, \beta$ ) равен нулю или целому отрицательному числу, и ряд превращается в полином.

Аналогично, выбирая  $s=1-\gamma$ , получаем, в предположении, что  $\gamma \neq 2, 3, 4, \dots$ ,

$$c_k = \frac{(k-\gamma+\alpha)(k-\gamma+\beta)}{k(k+1-\gamma)} c_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

откуда, если взять  $c_0=1$ , находим

$$c_k = \frac{(1-\gamma+\alpha)_k (1-\gamma+\beta)_k}{k! (2-\gamma)_k}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

\*) Если  $\gamma$  — нуль или отрицательное целое число, то, начиная с некоторого  $k$ , коэффициенты  $c_k$  обращаются в бесконечность, и решение вида (7.2.2) для значения  $s=0$  не может быть построено. Легко видеть, что решение этого типа получается, если взять  $s=1-\gamma$ .

Таким образом, при  $\gamma \neq 2, 3, 4, \dots$ , уравнение (7.2.1) имеет частное решение

$$u = u_2 = z^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_k (1-\gamma+\beta)_k}{k! (2-\gamma)_k} = \\ = z^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, z), \quad (7.2.5) \\ |z| < 1, \quad |\arg z| < \pi.$$

Если  $\gamma$  не является целым числом ( $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то оба решения (7.2.4—5) существуют одновременно и линейно независимы между собой, так что общий интеграл уравнения (7.2.1) может быть представлен в форме \*)

$$u = AF(\alpha, \beta, \gamma, z) + Bz^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, z), \quad (7.2.6)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные,  $|z| < 1, |\arg z| < \pi$ .

Для целых значений  $\gamma$  изложенный способ позволяет получить только одно частное решение, и для построения второго линейно независимого решения, содержащего в общем случае логарифмические члены, требуется видоизменение метода.

Путем замены переменных в (7.2.1) можно получить ряд других дифференциальных уравнений, интегралы которых могут быть представлены через гипергеометрические ряды. Так, например, полагая  $z = t^2$ , приходим к дифференциальному уравнению

$$t(1-t^2) \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \left[ \gamma - \frac{1}{2} - \left( \alpha + \beta + \frac{1}{2} \right) t^2 \right] \frac{du}{dt} - 4\alpha\beta tu = 0, \quad (7.2.7)$$

частными интегралами которого будут функции:

$$u = u_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, t^2), \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (7.2.8)$$

$$u = u_2 = t^{2-2\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, t^2), \quad (7.2.9)$$

$$|t| < 1, \quad |\arg t| < \pi, \quad \gamma \neq 2, 3, 4, \dots,$$

образующие при любом  $\gamma$ , не равном целому числу, систему линейно независимых решений этого уравнения в смежности с точкой  $t=0$ .

### § 7.3. Сферические функции Лежандра

Простейший класс сферических функций составляют полиномы Лежандра, рассмотренные в гл. IV, которые являются решениями уравнения (7.1.1) при  $\mu=0$  и целом положительном  $\nu=n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ): Следующий по степени сложности класс сфери-

\*) Линейная независимость следует из рассмотрения асимптотического поведения решений при  $z \rightarrow 0$ . При  $\gamma=1$  оба решения совпадают.

ческих функций образуют сферические функции Лежандра, которые представляют собой решения рассматриваемого уравнения при  $\mu = 0$  и произвольном вещественном или комплексном  $\nu$ , т. е. являются интегралами уравнения

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \nu(\nu + 1)u = 0. \quad (7.3.1)$$

Чтобы определить эти функции, заметим предварительно, что посредством введения надлежащих переменных уравнение (7.3.1) может быть приведено к гипергеометрическому дифференциальному уравнению. Так, например, подстановка  $t = \frac{1}{2}(1 - z)$  преобразует (7.3.1) в уравнение

$$t(1 - t)\frac{d^2u}{dt^2} + (1 - 2t)\frac{du}{dt} + \nu(\nu + 1)u = 0, \quad (7.3.2)$$

которое представляет собой частный случай уравнения (7.2.1), соответствующий значениям  $\alpha = -\nu$ ,  $\beta = 1 + \nu$ ,  $\gamma = 1$ . Далее, подстановка  $t = \frac{1}{z^2}$ ,  $u = z^{-\nu-1}v$  переводит (7.3.1) в уравнение

$$t(1 - t)\frac{d^2v}{dt^2} + \left[\left(\nu + \frac{3}{2}\right) - \left(\nu + \frac{5}{2}\right)t\right]\frac{dv}{dt} - \left(\frac{\nu}{2} + 1\right)\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)v = 0, \quad (7.3.3)$$

которое получается из (7.2.1), если положить

$$\alpha = \frac{\nu}{2} + 1, \quad \beta = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \quad \gamma = \nu + \frac{3}{2},$$

и т. д.

Из результатов § 7.2 следует, что дифференциальное уравнение (7.3.1) имеет частные решения:

$$u = u_1 = F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad |z - 1| < 2, \quad (7.3.4)$$

$$u = u_2 = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)(2z)^{\nu+1}} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (7.3.5)$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi; \quad \nu \neq -1, -2, \dots,$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  обозначает гипергеометрический ряд.

Полученные интегралы называются сферическими функциями Лежандра первого и второго рода и обозначаются соответственно символами  $P_\nu(z)$  и  $Q_\nu(z)$ . Таким образом,

$$P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad |z - 1| < 2, \quad (7.3.6)$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)(2z)^{\nu+1}} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (7.3.7)$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi; \quad \nu \neq -1, -2, \dots$$

Функции  $P_\nu(z)$  и  $Q_\nu(z)$  определены в ограниченной части плоскости комплексного переменного  $z$ , однако, как будет показано ниже, они допускают аналитическое продолжение в более широкую область\*).

Чтобы получить аналитическое продолжение сферической функции первого рода, воспользуемся формулой\*\*)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi \, d\varphi = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (7.3.8)$$

и запишем равенство (7.3.6) в виде

$$\begin{aligned} P_\nu(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{k! k!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} \left(\frac{1-z}{2} \sin^2 \varphi\right)^k = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(-\nu, \nu+1, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2} \sin^2 \varphi\right) d\varphi, \quad (7.3.9) \end{aligned}$$

причем законность изменения порядка суммирования и интегрирования следует из равномерной сходимости ряда относительно переменной  $\varphi$ .

\*) Напомним, что в данной главе, в отличие от гл. IX, символ  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  всегда обозначает сумму гипергеометрического ряда, поэтому модуль четвертого элемента не может превосходить единицы. Это ограничение отпадает, если понимать под  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  гипергеометрическую функцию, знакомство с теорией которой позволяет существенно упростить построение теории сферических функций.

\*\*\*) Эта формула непосредственно вытекает из результата примера 3 гл. I (стр. 28).

Гипергеометрический ряд под знаком интеграла (7.3.9) может быть просуммирован в конечной форме. Мы имеем

$$F\left(-\nu, \nu+1, \frac{1}{2}, -\omega\right) = \frac{\left[(1+\omega)^{\frac{1}{2}} + \omega^{\frac{1}{2}}\right]^{2\nu+1} + \left[(1+\omega)^{\frac{1}{2}} - \omega^{\frac{1}{2}}\right]^{-2\nu-1}}{2(1+\omega)^{\frac{1}{2}}} = f_\nu(\omega), \quad |\omega| < 1. \quad (7.3.10)$$

Для доказательства равенства (7.3.10) заметим, что функция  $f_\nu(\omega)$  регулярна в круге  $|\omega| < 1$  и удовлетворяет дифференциальному уравнению \*)

$$\omega(1+\omega)f''_\nu + \left(\frac{1}{2} + 2\omega\right)f'_\nu - \nu(\nu+1)f_\nu = 0, \quad (7.3.11)$$

которое, после замены  $\omega$  на  $-\omega$  переходит в гипергеометрическое уравнение (7.2.1) с параметрами  $\alpha = -\nu$ ,  $\beta = \nu+1$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Так как уравнение (7.2.1) имеет единственный интеграл, регулярный в круге  $|\omega| < 1$  и приводящийся к единице при  $\omega \rightarrow 0$ , то отсюда следует, что  $f_\nu(\omega) \equiv F\left(-\nu, \nu+1, \frac{1}{2}, -\omega\right)$ .

На основании (7.3.10) функция Лежандра первого рода допускает интегральное представление

$$P_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\nu\left(\frac{z-1}{2} \sin^2 \varphi\right) d\varphi.$$

Данная формула выведена в предположении, что  $|z-1| < 2$ , однако интеграл в правой части рассматриваемого равенства сохраняет смысл и представляет регулярную функцию от  $z$  на всей плоскости с разрезом  $(-\infty, -1)$ . Действительно, для таких  $z$  и  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  переменное  $\omega = \frac{z-1}{2} \sin^2 \varphi$  принадлежит плоскости с разрезом  $(-\infty, -1)$ , в которой функция  $f_\nu(\omega)$  остается регулярной, и справедливость высказанного выше утверждения вытекает из теоремы, приведенной на стр. 12.

\*) Точка  $\omega = 0$  — обыкновенная точка функции  $f_\nu(\omega)$ , так как при обходе вокруг этой точки  $f_\nu(\omega)$  принимает прежнее значение. При проверке (7.3.11) удобно показать, что

$$\omega^{\frac{1}{2}} \left\{ \omega^{\frac{1}{2}} (1+\omega)^{\frac{1}{2}} \left[ (1+\omega)^{\frac{1}{2}} f_\nu \right]' \right\}' - \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2 f_\nu = 0,$$

и затем выполнить дифференцирование.



Таким образом, аналитическое продолжение функции  $P_\nu(z)$  дается формулой

$$P_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\nu\left(\frac{z-1}{2} \sin^2 \varphi\right) d\varphi, \quad (7.3.12)$$

$$|\arg(z+1)| < \pi.$$

Функция, определенная равенством (7.3.12), регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, -1)$  (рис. 22) и, согласно принципу непрерывности, является решением дифференциального уравнения (7.3.1).

Из формулы (7.3.12) вытекает, что

$$P_\nu(1) = 1. \quad (7.3.13)$$

Мы увидим ниже, что всякое решение уравнения (7.3.1), линейно независимое с решением  $u = P_\nu(z)$ , неограниченно возрастает при  $z \rightarrow 1$ , поэтому функция Лежандра первого рода может быть определена также как интеграл рассматриваемого уравнения, приводящийся к единице, когда  $z \rightarrow 1$ .

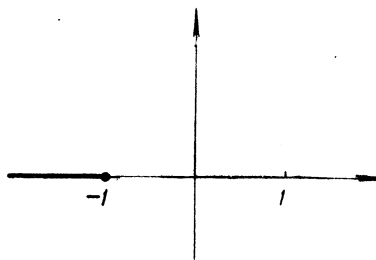


Рис. 22.

Так как  $f_\nu(w)$  представляет собой целую функцию  $\nu$ , из (7.3.6) вытекает, что сферическая функция Лежандра первого рода  $P_\nu(z)$  является целой функцией индекса  $\nu$ .

Из легко проверяемого тождества  $f_{-\nu-1}(w) = f_\nu(w)$  следует, что

$$P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z) \quad (7.3.14)$$

при любых вещественных или комплексных значениях  $\nu$ .

Для аналитического продолжения функции Лежандра второго рода  $Q_\nu(z)$  воспользуемся равенством

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^{2k+\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu) \left(\frac{\nu+1}{2}\right)_k \left(\frac{\nu+1}{2}\right)_k}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\nu+3}{2}\right)_k \left(\frac{\nu+5}{2}\right)_k}, \quad (7.3.15)$$

$$R(\nu) > -1, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

которое легко доказывается с помощью подстановки  $t = s^{-1}$  и применения формул (1.5.2), (1.5.6) и (1.2.3) теории  $\Gamma$ -функции.

На основании (7.3.15) и определения функции  $Q_\nu(z)$  имеем, в предположении, что  $|z| > 1$ ,  $|\arg z| < \pi$  и  $R(\nu) > -1$ :

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \frac{V\pi\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})(2z)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)_k \left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_k k!} \frac{1}{z^{2k}} = \\ &= \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{\nu}{2}+\frac{5}{4}\right)_k}{\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_k k!} \frac{1}{z^{2k}} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{2k+\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}} = \\ &= \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{\nu}{2}+\frac{5}{4}\right)_k}{\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_k k!} \frac{1}{(zt)^{2k}} = \\ &= \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \int_1^{\infty} F\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}+\frac{5}{4}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2 t^2}\right) \frac{dt}{t^{\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}}. \quad (7.3.16) \end{aligned}$$

Законность изменения порядка интегрирования и суммирования может быть оправдана путем доказательства абсолютной сходимости.

Дальнейшие преобразования основываются на формуле

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}+\frac{5}{4}, \nu+\frac{3}{2}, w\right) &= \\ &= (1-w)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1+(1-w)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{-\nu-\frac{1}{2}} = g_\nu(w), \quad (7.3.17) \end{aligned}$$

для доказательства которой достаточно убедиться, что ее правая часть удовлетворяет уравнению (7.2.1) с  $\alpha = \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}$ ,  $\gamma = \nu + \frac{3}{2}$  и  $z = w^*$ .

\*) Чтобы упростить проверку этого утверждения, которая несколько утомительна, целесообразно показать, что

$$\begin{aligned} \left[ (1-w)^{\frac{1}{2}} g_\nu \right]' &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right) g_\nu}{1+(1-w)^{1/2}}, \\ \left\{ (1-w)^{\frac{1}{2}} \left[ (1-w)^{\frac{1}{2}} g_\nu \right] \right\}' &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right) \left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\left[1+(1-w)^{\frac{1}{2}}\right]^2}. \end{aligned}$$

умножить первое равенство на  $\left(\nu+\frac{3}{2}\right)(1-w)^{\frac{1}{2}}$ , второе — на  $w$  и, выполнив дифференцирование, сложить полученные равенства.

Формулу (7.3.18) можно также вывести из равенства (9.8.3)<sub>2</sub>, положив в нем  $\alpha = \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}$ ,  $z = w$ .

Из (7.3.16) и (7.3.17) следует

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \int_1^\infty g_\nu\left(\frac{1}{z^2 t^2}\right) \frac{dt}{t^{\nu+1/2} \sqrt{t-1}}, \quad (7.3.18)$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi; \quad R(\nu) > -1.$$

Предположим временно, что  $z$  есть вещественное число, большее чем единица, и введем новое переменное интегрирования, положив

$$zt = 1 - (z-1) \operatorname{ch} \psi.$$

Формула (7.3.18) принимает тогда вид \*)

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty h_\nu\left(\frac{z-1}{2} \operatorname{ch}^2 \psi\right) d\psi,$$

где  $h_\nu(w)$  обозначает функцию, определенную равенством

$$h_\nu(w) = \frac{[(1+w)^{1/2} + w^{1/2}]^{-2\nu-1}}{(1+w)^{1/2}}, \quad (7.3.19)$$

$$|\arg w| < \pi, \quad |\arg(1+w)| < \pi.$$

Выведенная формула получена в предположении, что  $z > 1$ , но нетрудно показать, что интеграл в правой части равенства сохраняет смысл в более широкой области. В самом деле, выражение под знаком интеграла представляет непрерывную функцию обоих переменных и регулярную функцию от  $z$ , когда  $z$  принадлежит плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$  и  $\psi$  изменяется в промежутке  $(0, \infty)$  \*\*). При  $R(\nu) > -1$  интеграл сходится равномерно во всякой области  $0 < \rho \leq |z-1| \leq R < \infty$ ,  $|\arg(z-1)| \leq \pi - \delta$ . Поэтому рассматриваемый интеграл представляет регулярную функцию в плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ , и аналитическое продолжение функции Лежандра второго рода дается формулой

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty h_\nu\left(\frac{z-1}{2} \operatorname{ch}^2 \psi\right) d\psi, \quad (7.3.20)$$

$$|\arg(z-1)| < \pi, \quad R(\nu) > -1.$$

\*) В ходе преобразований используется известное тождество

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

\*\*\*) Для таких  $z$  и  $\psi$  переменное  $w = \frac{z-1}{2} \operatorname{ch}^2 \psi$  принадлежит плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , в которой функция  $h_\nu(w)$  регулярна.

Чтобы получить аналитическое продолжение  $Q_\nu(z)$  для случая  $R(\nu) \leq -1$ , заметим, что функция Лежандра второго рода удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$Q_\nu(z) = \frac{2\nu+3}{\nu+1} z Q_{\nu+1}(z) - \frac{\nu+2}{\nu+1} Q_{\nu+2}(z), \quad (7.3.21)$$

в справедливости которого можно легко убедиться путем подстановки в него ряда (7.3.7). Пользуясь этим соотношением, мы можем представить функцию  $Q_\nu(z)$  с произвольным индексом  $\nu \neq -1, -2, \dots$  в виде

$$Q_\nu(z) = a_p(z, \nu) Q_{\nu+p}(z) + b_p(z, \nu) Q_{\nu+p+1}(z), \quad (7.3.22)$$

где  $a_p(z, \nu)$  и  $b_p(z, \nu)$  — полиномы относительно  $z$ ,  $p$  — целое положительное число. Выберем это число настолько большим, чтобы  $R(\nu) > -(p+1)$ . Тогда аналитическое продолжение каждой из сферических функций в правой части равенства (7.3.22) может быть выполнено по формуле (7.3.20).

Подставляя найденные выражения в (7.3.22), получим функцию, регулярную в плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$  (рис. 23), являющуюся аналитическим продолжением  $Q_\nu(z)$ .

Таким образом, функция Лежандра второго рода  $Q_\nu(z)$  с произвольным индексом  $\nu \neq -1, -2, \dots$  представляет регулярную функцию  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ .

В силу принципа непрерывности рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению (7.3.1). Легко показать, исходя из (7.3.7), что

$$Q_\nu(z) \rightarrow \infty, \quad (7.3.23)$$

$$z \rightarrow 1+0$$

поэтому  $Q_\nu(z)$  есть решение уравнения (7.3.1), линейно независимое с  $P_\nu(z)$ .

Перейдем теперь к изучению  $Q_\nu(z)$  как функции индекса  $\nu$  и докажем, что при фиксированном  $z$  отношение

$$q_\nu(z) = \frac{Q_\nu(z)}{\Gamma(1+\nu)} \quad (7.3.24)$$

есть целая функция.

При  $|z| > 1$  требуемый результат непосредственно вытекает из равенства (7.3.7). Доказательство, пригодное для любого  $z$ , принад-

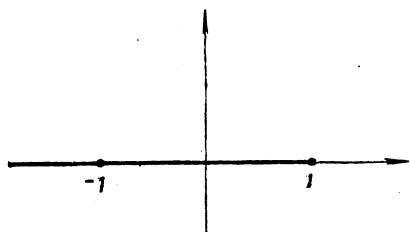


Рис. 23.

лежащего плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ , основывается на интегральном представлении (7.3.20) и рекуррентном соотношении

$$q_\nu(z) = (2\nu + 3)z q_{\nu+1}(z) - (\nu + 2)^2 q_{\nu+2}(z), \quad (7.3.25)$$

являющемся следствием (7.3.21).

Из (7.3.20) получаем, что  $q_\nu(z)$  представляет регулярную функцию  $\nu$  в полуплоскости  $R(\nu) > -1$  \*).

Повторное применение (7.3.25) приводит к выражению

$$q_\nu(z) = \alpha_p(\nu, z) q_{\nu+p}(z) + \beta_p(\nu, z) q_{\nu+p+1}(z), \quad (7.3.26)$$

где  $p$  — целое положительное число,  $\alpha_p(\nu, z)$  и  $\beta_p(\nu, z)$  — полиномы относительно  $\nu$ . Отсюда следует, что  $q_\nu(z)$  регулярна в полуплоскости  $R(\nu) > -(p+1)$ . Принимая во внимание, что число  $p$  может быть выбрано как угодно большим, заключаем, что  $q_\nu(z)$  — целая функция  $\nu$ .

Данный результат показывает, что  $Q_\nu(z)$  есть мероморфная функция  $\nu$  с простыми полюсами в точках  $\nu = -1, -2, \dots$

Общий интеграл уравнения (7.3.1) может быть представлен в виде линейной комбинации функций Лежандра первого и второго рода

$$u = AP_\nu(z) + BQ_\nu(z), \quad (7.3.27)$$

где  $|\arg(z-1)| < \pi$ ,  $\nu \neq -1, -2, \dots$

В приложениях встречается также необходимость находить общий интеграл рассматриваемого уравнения при условии, что переменное  $z = x$  есть вещественное число, принадлежащее интервалу  $(-1, 1)$ .

Так как функция  $P_\nu(z)$  определена для таких  $z$ , то достаточно построить второе линейно независимое решение. Таким решением, как нетрудно убедиться, является функция

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{2} [Q_\nu(x + i0) + Q_\nu(x - i0)], \quad (7.3.28)$$

равная полусумме значений функции  $Q_\nu(z)$  на верхнем и нижнем берегах разреза \*\*). Общий интеграл уравнения (7.3.1) при  $z = x$  ( $-1 < x < 1$ ) будет

$$u = AP_\nu(x) + BQ_\nu(x), \quad \nu \neq -1, -2, \dots \quad (7.3.29)$$

\*) Действительно,  $h_\nu(w)$  — целая функция от  $\nu$ , и интеграл (7.3.20) сходится равномерно относительно  $\nu$  в области  $R(\nu) \geq -1 + \delta$  ( $\delta$  — произвольно малое положительное число), поэтому применима теорема, приведенная на стр. 12.

\*\*) В немецкой литературе символы  $P_\nu(z)$  и  $Q_\nu(z)$  используются исключительно для обозначения решений (7.3.1), относящихся к промежутку  $-1 < z < 1$ , а в остальных случаях применяются соответствующие готические буквы.

### § 7.4. Интегральные представления для сферических функций

Сферические функции Лежандра допускают различные интегральные представления с помощью определенных или контурных интегралов, содержащих переменные  $z$  и  $v$  как параметры. Наибольшей общностью из этих представлений обладают, как правило, формулы, включающие контурные интегралы, однако для приложений наиболее важное значение имеют интегральные представления, даваемые интегралами, взятыми по отрезку вещественной оси, в связи с чем мы ограничимся исключительно формулами этого типа, отсылая читателя по поводу других интегральных представлений к работам Гобсона [1] и Барнса [1].

Чтобы получить первое из интегральных представлений для функции  $P_\nu(z)$ , предположим, что  $z = \operatorname{ch} \alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , и введем в (7.3.12) новое переменное интегрирования  $\theta$ , положив  $\operatorname{sh} \frac{\theta}{2} = \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \varphi$ . Мы получим тогда

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta \quad (7.4.1)$$

для любого вещественного или комплексного значения индекса  $\nu$ .

Если записать последнюю формулу в виде

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta$$

и положить затем

$$e^\theta = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cdot \cos \psi,$$

то после несложного вычисления приходим к другому важному интегральному представлению для функции Лежандра первого рода:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \psi)^{\nu+1}}, \quad (7.4.2)$$

где  $\nu$  — произвольное число.

Заменив в (7.4.2)  $\nu$  на  $(-\nu - 1)$  и воспользовавшись соотношением (7.3.14), находим

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \psi)^\nu d\psi. \quad (7.4.3)$$

Если  $-1 < R(\nu) < 0$ , то функция  $P_\nu(\operatorname{ch} \alpha)$  допускает еще два полезных интегральных представления, которые могут быть выведены из (7.4.1) с помощью контурного интегрирования.

Рассмотрим с этой целью интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_C \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})t}}{(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} t)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

взятый по контуру  $C$ , состоящему из отрезков  $(-\infty, -\alpha - \rho)$ ,  $(-\alpha + \rho, \alpha - \rho)$ ,  $(\alpha + \rho, \infty)$  вещественной оси, замыкающих их полуокружностей малого радиуса  $\rho$ , выключающих точки разветвления  $t = \pm \alpha$ , и прямой  $I(t) = \pi$  (рис. 24).

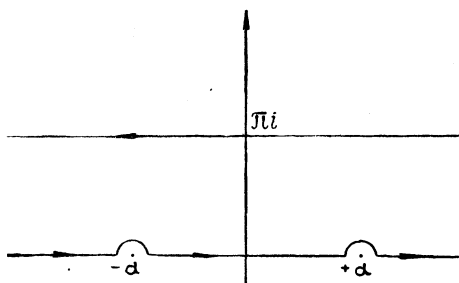


Рис. 24.

Полагая  $f(t) = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} t)^{\frac{1}{2}}$ , находим, что значения  $\arg f$  на отрезке  $(-\alpha + \rho, \alpha - \rho)$ , отрезке  $(\alpha + \rho, \infty)$ , вдоль прямой  $I(t) = \pi$  и на отрезке  $(-\infty, -\alpha - \rho)$  будут соответственно равны  $0$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$ .

Внутри  $C$  рассматриваемая ветвь функции регулярна и при указанном выше ограничении параметра  $\nu$  интегралы по замыкающим отрезкам  $R(t) = \pm N$  стремятся к нулю, когда  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому интеграл по контуру  $C$  равен нулю.

Интегралы по малым полуокружностям стремятся к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ , поэтому, переходя к пределу и учитывая изменение  $\arg f$  вдоль пути интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta - \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})(\theta + \pi i)}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta = 0, \end{aligned}$$

или после несложных преобразований

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} e^{(\nu + \frac{1}{2})\pi i} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \\ + \frac{2}{\pi i} \int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad -1 < R(\nu) < 0. \quad (7.4.4)$$

Заменяя в (7.4.4)  $\nu$  на  $(-\nu - 1)$  и принимая во внимание (7.3.14), имеем

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-(\nu + \frac{1}{2})\pi i} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta - \\ - \frac{2}{\pi i} \int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad (7.4.5)$$

где снова  $-1 < R(\nu) < 0$ .

Складывая и вычитая полученные формулы, находим:

$$2P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{4}{\pi} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \\ 0 = \frac{4i}{\pi} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \frac{4}{\pi i} \int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta,$$

откуда следуют искомые интегральные представления:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad (7.4.6)$$

$$\alpha \geq 0, \quad -1 < R(\nu) < 0,$$

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad (7.4.7)$$

$$\alpha \geq 0, \quad -1 < R(\nu) < 0.$$

Интегральные представления для функции Лежандра второго рода могут быть получены из формулы (7.3.20). Полагая в этой послед-



ней  $z = \operatorname{ch} \alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ),  $\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \psi = \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}$ , находим

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \int_\alpha^\infty \frac{e^{-(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad (7.4.8)$$

где  $R(\nu) > -1$ .

С помощью подстановки  $e^\theta = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varphi$  формула (7.4.8) приводится к виду

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varphi)^{\nu+1}}, \quad (7.4.9)$$

$$\alpha \geq 0, \quad R(\nu) > -1.$$

Равенства (7.4.1—9) доказаны в предположении, что  $\alpha \geq 0$ , т. е.  $z = \operatorname{ch} \alpha \geq 1$ , однако, в соответствии с принципом аналитического продолжения, они остаются справедливыми во всей области комплексных значений  $\alpha$ , где обе стороны рассматриваемых формул представляют собой регулярные функции. Например, формула (7.4.2) верна в области  $R(\operatorname{ch} \alpha) > 0$ , формула (7.4.6) — во всей плоскости  $z$  с разрезом  $(-\infty, -1)$  и т. д.

В заключение приведем интегральное представление для функции  $P_\nu(z)$ , пригодное для интервала  $-1 < z \leq 1$ . Полагая в этом случае в формуле (7.3.12)

$$z = \cos \beta \quad (0 \leq \beta < \pi), \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \varphi,$$

находим

$$P_\nu(\cos \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos \beta}} d\theta \quad (7.4.10)$$

для любых значений индекса  $\nu$ .

## § 7.5. Функциональные соотношения для сферических функций

Дифференциальное уравнение (7.3.1) не меняется, если заменить в нем  $\nu$  на  $(-\nu - 1)$  или  $z$  на  $(-z)$ , поэтому, наряду с интегралами  $P_\nu(z)$  и  $Q_\nu(z)$ , решениями этого уравнения будут также функции  $P_{-\nu-1}(z)$ ,  $Q_{-\nu-1}(z)$ ,  $P_\nu(-z)$ ,  $Q_\nu(-z)$ . Так как всякие три интеграла линейного дифференциального уравнения второго порядка связаны линейным соотношением, между упомянутыми решениями уравнения (7.3.1) должны существовать определенные функциональные соотношения, простейшим среди которых является равенство, установленное в § 7.3:

$$P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z). \quad (7.5.1)$$

Чтобы получить соотношение, связывающее  $P_\nu(z)$ ,  $Q_\nu(z)$  и  $Q_{-\nu-1}(z)$ , предположим временно, что  $z > 1$  и  $-1 < R(\nu) < 0$ . Тогда  $-1 < R(-\nu-1) < 0$  и, воспользовавшись формулами (7.4.7—8), мы имеем

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) - Q_{-\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) = \pi \operatorname{ctg} \nu\pi \cdot P_\nu(\operatorname{ch} \alpha),$$

или

$$\sin \nu\pi [Q_\nu(z) - Q_{-\nu-1}(z)] = \pi \cos \nu\pi \cdot P_\nu(z). \quad (7.5.2)$$

Так как при  $z$ , принадлежащем плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ , левая и правая части равенства (7.5.2) являются регулярными функциями, это соотношение сохраняет силу во всей разрезанной плоскости. Если исключить целые значения  $\nu$ , обе стороны (7.5.2) остаются регулярными функциями  $\nu$  также вне рассматриваемой полосы, поэтому формула верна при всех  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Полагая в (7.5.2)  $\nu = n - \frac{1}{2}$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , находим

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(z) = Q_{-n-\frac{1}{2}}(z). \quad (7.5.3)$$

Для вывода следующего функционального соотношения предположим сначала, что  $|z| > 1$  и  $|\arg z| < \pi$ . Формула (7.3.7) тогда дает

$$Q_\nu(-z) = -e^{\pm \nu\pi i} Q_\nu(z), \quad \nu \neq -1, -2, \dots, \quad (7.5.4)$$

где берется верхний или нижний знак, смотря по тому  $I(z) \geq 0$ .

Воспользовавшись принципом аналитического продолжения, мы можем отбросить условие  $|z| > 1$  и установить справедливость доказанного равенства (7.5.4) для любых  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$  и произвольных  $\nu \neq -1, -2, \dots$

Наконец, из соотношений (7.5.2) и (7.5.4) получаем

$$-\sin \nu\pi [e^{\pm \nu\pi i} Q_\nu(z) + e^{\mp \nu\pi i} Q_{-\nu-1}(z)] = \pi \cos \nu\pi \cdot P_\nu(-z),$$

откуда, исключая  $Q_{-\nu-1}(z)$  с помощью (7.5.2), находим:

$$\frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot Q_\nu(z) = P_\nu(z) e^{\mp \nu\pi i} - P_\nu(-z), \quad (7.5.5)$$

где  $\nu \neq -1, -2, \dots$ , и берется верхний или нижний знак, в зависимости от того  $I(z) \geq 0$ .

Полученные функциональные соотношения (7.5.1—5) играют важную роль в теории сферических функций. Из формулы (7.5.5) в частности вытекает, что при  $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot Q_\nu(x + i0) &= P_\nu(x) e^{-\nu\pi i} - P_\nu(-x), \\ \frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot Q_\nu(x - i0) &= P_\nu(x) e^{\nu\pi i} - P_\nu(-x), \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

откуда следует

$$Q_\nu(x + i0) - Q_\nu(x - i0) = -i\pi P_\nu(x), \quad -1 < x < 1. \quad (7.5.7)$$

Полученная формула объясняет необходимость проведения разреза до точки  $z = 1$  для функции Лежандра второго рода.

## § 7.6. Представление сферических функций с помощью рядов

Сферические функции Лежандра, определенные в § 7.3, являются регулярными функциями комплексного переменного  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, -1)$  для функций первого рода и  $(-\infty, 1)$  — для функций второго рода. В ограниченных областях этой плоскости сферические функции могут быть представлены гипергеометрическими рядами с различными элементами, примерами которых служат ряды (7.3.6—7). Простейшим методом построения всей совокупности подобных разложений является метод Барнса\*), основанный на преобразовании контурных интегралов, с помощью которых определяются сферические функции, однако большинство результатов может быть получено посредством более элементарных рассуждений. Мы начнем с вывода формул, пригодных для представления сферических функций в области  $|z| > 1$ ,  $|\arg z| < \pi$ . Согласно (7.3.7), имеем для таких  $z$  и произвольных  $\nu \neq -1, -2, \dots$ :

$$Q_\nu(z) = \frac{V\pi \Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(\nu + \frac{3}{2})} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right). \quad (7.6.1)$$

Чтобы получить соответствующее разложение для функции первого рода, предположим временно, что  $2\nu$  не является целым числом, и воспользуемся формулой (7.5.2), которую в этом случае мы можем представить в виде

$$P_\nu(z) = \frac{\operatorname{tg} \nu\pi}{\pi} [Q_\nu(z) - Q_{-\nu-1}(z)]. \quad (7.6.2)$$

---

\*) Барнс [1]; читатель, знакомый с теорией гипергеометрической функции, может получить формулы данного параграфа как частный случай общих функциональных соотношений § 9.5 и 9.6.

Сводка формул, дающих представления сферических функций через гипергеометрические ряды, приведена в монографии Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера, Трикоми [1], т. 1, стр. 124—139.

Подставляя ряд (7.6.1) и воспользовавшись для преобразования отношения гамма-функций формулой (1.2.2), получаем

$$P_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1)} (2z)^\nu F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{z^2}\right) + \\ + \frac{\Gamma\left(-\nu - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(-\nu)} (2z)^{-\nu-1} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (7.6.3)$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi.$$

Условие, наложенное на параметр  $\nu$ , может быть заменено более слабым условием  $2\nu \neq 2p + 1$  ( $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), так как в окрестности точек  $\nu = p$  обе стороны равенства (7.6.3) остаются регулярными функциями. Таким образом, формула (7.6.3) верна при любых  $\nu \neq \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$

Для вывода разложений сферических функций, пригодных в той части разрезанной плоскости, где  $|z| < 1$ , заметим предварительно, что дифференциальное уравнение (7.3.1) переходит при подстановке  $t = z^2$  в уравнение

$$t(1-t) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right) \frac{du}{dt} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) u = 0, \quad (7.6.4)$$

которое является частным случаем гипергеометрического уравнения (7.2.1), соответствующим значениям  $\alpha = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -\frac{\nu}{2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Согласно результатам § 7.2, его общий интеграл при  $|z| < 1$  может быть представлен в форме

$$u = AF\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + BzF\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad (7.6.5)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. В частности, если значения этих постоянных выбраны равными  $A = P_\nu(0)$ ,  $B = P'_\nu(0)$ , то  $u \equiv P_\nu(z)$ , и для получения искомого разложения достаточно вычислить значения сферической функции и ее производной в точке  $z = 0$ .

Воспользуемся с этой целью рядом (7.3.6) и положим в нем  $z = 0$ . Мы имеем тогда

$$\begin{aligned} P_\nu(0) &= F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(1)_k k!} \frac{1}{2^k} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\nu) \Gamma(1+\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma(k+\nu+1)}{2^k k!^2} = \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma(k+\nu+1)}{2^k k!^2}, \end{aligned}$$

на основании формулы (1.2.2) теории гамма-функции.

Предположим теперь временно, что  $-1 < R(\nu) < 0$ . В этом случае (§ 1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)} &= B(k-\nu, \nu+1) = \\ &= \int_0^1 t^{k-\nu-1} (1-t)^\nu dt, \quad k=0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} P_\nu(0) &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{2^k k! \Gamma(1+\nu)} \int_0^1 t^{k-\nu-1} (1-t)^\nu dt = \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 t^{-\nu-1} (1-t)^\nu dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{k! \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 t^{-\nu-1} (1-t)^\nu \left(1-\frac{t}{2}\right)^{-\nu-1} dt. \end{aligned}$$

Законность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из абсолютной сходимости. Полагая теперь  $1-t = \sqrt{s}$ , находим

$$\begin{aligned} P_\nu(0) &= -\frac{2^\nu \sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 s^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\nu-1} ds = \\ &= -2^\nu \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(-\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}, \end{aligned}$$

или, если воспользоваться формулами (1.2.2—3),

$$P_\nu(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}. \quad (7.6.6)$$

Так как обе части равенства (7.6.6) представляют собой целые функции  $\nu$ , полученный результат справедлив для любых значений  $\nu$ .

На основании (1.2.2), формула (7.6.6) может быть записана также в виде

$$P_\nu(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} \cos \frac{\nu\pi}{2}. \quad (7.6.7)$$

Значение  $P'_\nu(0)$  проще всего вычислить с помощью соотношения (7.8.5). Мы имеем

$$P'_\nu(0) = \nu P_{\nu-1}(0) = \nu \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \sin \frac{\nu\pi}{2},$$

откуда, принимая во внимание (1.2.1),

$$P'_\nu(0) = \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \sin \frac{\nu\pi}{2}. \quad (7.6.8)$$

Из (7.6.5, 7—8) вытекает следующее разложение для функции Лежандра первого рода, пригодное в области  $|z| < 1$ :

$$P_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \\ + \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \sin \frac{\nu\pi}{2} z F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (7.6.9)$$

Формула (7.6.9) справедлива при любых  $\nu$ .

Соответствующее разложение для функции Лежандра второго рода получается из (7.6.9) и (7.5.5). После простых преобразований мы находим

$$Q_\nu(z) = e^{\mp \frac{\nu\pi i}{2}} \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} z F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right) \mp \right. \\ \left. \mp i \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \right], \quad (7.6.10)$$

где  $\nu \neq -1, -2, \dots$ ,  $|z| < 1$  и берется верхний или нижний знак, в зависимости от того  $I(z) \geq 0$ .

Более интересным для приложений является соответствующее разложение для функции  $Q_\nu(x)$ , которое вытекает из (7.6.10) и формулы (7.3.28) и имеет вид

$$Q_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) V^{\pi} \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} x F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, x^2\right) - \\ - \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) V^{\pi} \sin \frac{\nu\pi}{2}}{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (7.6.11)$$

$$-1 < x < 1, \quad \nu \neq -1, -2, \dots$$

Чтобы получить следующий важный класс разложений сферических функций, предположим сначала, что  $z$  есть вещественное число, большее чем единица, и  $R(\nu) > -1$ . Полагая  $z = \operatorname{ch} \alpha$  ( $\alpha > 0$ ) и воспользовавшись интегральным представлением (7.4.9), имеем

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \varphi)^{\nu+1}} = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\left(e^\alpha \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} - e^{-\alpha} \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\nu+1}} = \\ = e^{-(\nu+1)\alpha} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\left(1 - e^{-2\alpha} \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\nu+1} \operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\varphi}{2}} = \\ = e^{-(\nu+1)\alpha} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\varphi}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1) k!} e^{-2k\alpha} \operatorname{th}^{2k} \frac{\varphi}{2} = \\ = e^{-(\nu+1)\alpha} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1) \cdot k!} e^{-2k\alpha} \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}^{2k} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\varphi}{2}} d\varphi,$$

причем доказательство законности изменения порядка суммирования и интегрирования не представляет затруднений. Полагая теперь  $t = \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2}$ , находим

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}^{2k} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}} (1-t)^\nu dt = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right)},$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
 Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) &= e^{-(\nu+1)\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right)} e^{-2k\alpha} = \\
 &= e^{-(\nu+1)\alpha} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{k! \left(\nu+\frac{3}{2}\right)_k} e^{-2k\alpha}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} e^{-(\nu+1)\alpha} F\left(\nu+1, \frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, e^{-2\alpha}\right), \quad (7.6.12)$$

или, если вернуться к переменной  $z$ ,

$$\begin{aligned}
 Q_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \left[ z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]^{\nu+1} \times \\
 &\quad \times F\left[ \nu+1, \frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \left[ z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right]. \quad (7.6.13)
 \end{aligned}$$

Пусть теперь  $z$  будет комплексным числом, принадлежащим области  $|\arg(z-1)| < \pi$  и

$$(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = (z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Переменное  $w = z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}$  принадлежит тогда области  $|w| < 1$ ,  $|\arg w| < \pi$  и является регулярной функцией  $z$ . Поэтому обе стороны (7.6.13) представляют собой регулярные функции, и эта формула, доказанная ранее для вещественных  $z > 1$ , остается справедливой во всей рассматриваемой области. Так же легко, пользуясь принципом аналитического продолжения, освободиться от условия  $R(\nu) > -1$  и заменить его единственным требованием  $\nu \neq -1, -2, \dots$ . Таким образом, разложение (7.6.13) справедливо для любых  $\nu \neq -1, -2, \dots$  и произвольных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ , т. е. во всей области, где определена функция  $Q_\nu(z)$ , что придает этой формуле особо важное значение. Разложение для функции  $P_\nu(z)$  получается из (7.6.13) с помощью соотношения (7.6.2). Предполагая временно  $2\nu$  не равным целому



числу, после несложного преобразования, основанного на равенстве (1.2.2), находим

$$\begin{aligned}
 P_\nu(z) = & \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \operatorname{tg} \pi \nu \left[ z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]^{\nu+1} \times \\
 & \times F \left\{ \nu+1, \frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \left[ z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\} + \\
 & + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)} \left[ z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\nu} \times \\
 & \times F \left\{ -\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\nu, \left[ z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\}, \quad (7.6.14) \\
 & |\arg(z-1)| < \pi.
 \end{aligned}$$

Условие, наложенное на параметр  $\nu$ , может быть заменено более слабым требованием  $2\nu \neq 2p+1$  ( $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), так как вблизи точки  $\nu=p$  обе стороны (7.6.14) остаются регулярными функциями. Поэтому формула (7.6.14) верна для всех  $\nu \neq \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$  и  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ . При  $\nu = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$  формула приобретает неопределенный вид, и для получения соответствующего аналитического выражения для  $P_\nu(z)$  необходимо выполнить предельный переход.

### § 7.7. Вронскиан системы решений уравнения Лежандра

Пусть  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$  — пара решений уравнения Лежандра (7.3.1), т. е.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} (1-z^2) u_1' + \nu(\nu+1) u_1 &= 0, \\
 \frac{d}{dz} (1-z^2) u_2' + \nu(\nu+1) u_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Обозначив через  $W\{u_1(z), u_2(z)\}$  вронскиан этой пары решений (§ 5.9), получаем, умножив первое из уравнений на  $u_2(z)$ , второе — на  $u_1(z)$  и вычитая одно из другого,

$$\frac{d}{dz} (1-z^2) W\{u_1(z), u_2(z)\} = 0,$$

откуда

$$W\{u_1(z), u_2(z)\} = \frac{C}{1-z^2}.$$

В частности, выбирая  $u_1(z) = Q_\nu(z)$ ,  $u_2 = Q_{-\nu-1}(z)$  и предполагая временно, что  $2\nu$  не есть целое число, имеем на основании формулы (7.6.1) при  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$u_1(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1}} [1 + O(|z|^{-2})],$$

$$u_2(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} (2z)^\nu [1 + O(|z|^{-2})],$$

$$u_1'(z) = -\frac{\sqrt{\pi} (1+\nu) \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1} z} [1 + O(|z|^{-2})],$$

$$u_2'(z) = \frac{\sqrt{\pi} \nu \Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \frac{(2z)^\nu}{z} [1 + O(|z|^{-2})],$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} W\{u_1(z), u_2(z)\} &= \frac{\pi \Gamma(1+\nu) \Gamma(-\nu)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{2\nu+1}{z^2} [1 + O(|z|^{-2})] = \\ &= -\pi \operatorname{ctg} \nu\pi \cdot \frac{1}{z^2} [1 + O(|z|^{-2})], \end{aligned}$$

если принять во внимание формулы (1.2.1—2) теории гамма-функции. Сопоставление полученных результатов показывает, что для рассматриваемой пары решений значение постоянной будет  $C = \pi \operatorname{ctg} \nu\pi$ , поэтому

$$W\{Q_\nu(z), Q_{-\nu-1}(z)\} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \nu\pi}{1-z^2}, \quad |\arg(z-1)| < \pi. \quad (7.7.1)$$

Доказанная формула справедлива при любых  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , так как вблизи точек  $\nu = n - \frac{1}{2}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) обе стороны равенства остаются регулярными функциями. Полученный результат показывает, что  $Q_\nu(z)$  и  $Q_{-\nu-1}(z)$  образуют систему линейно независимых решений уравнений (7.3.1) для всех  $\nu$ , не равных целому числу, за исключением полуцелых значений  $\nu$ , когда вронскиан обращается в нуль и между рассматриваемыми решениями существует линейная связь (7.5.3).

Чтобы вычислить вронскиан системы решений  $u_1 = P_\nu(z)$ ,  $u_2 = Q_\nu(z)$ , предположим снова, что  $2\nu$  не равно целому числу, и воспользуемся соотношением (7.6.2). Мы имеем тогда

$$\begin{aligned} W\{P_\nu(z), Q_\nu(z)\} &= \frac{\operatorname{tg} \nu\pi}{\pi} W\{Q_\nu(z), Q_{-\nu-1}(z)\} = \frac{1}{1-z^2}, \quad (7.7.2) \\ &|\arg(z-1)| < \pi. \end{aligned}$$

Полученный результат справедлив, согласно принципу аналитического продолжения, для любых  $\nu \neq -1, -2, \dots$ , поэтому функции  $P_\nu(z)$ ,  $Q_\nu(z)$  составляют систему линейно независимых решений уравнения (7.3.1) при любых значениях  $\nu$ , для которых обе функции имеют определенное значение.

Аналогичным образом, с помощью соотношения (7.5.5) получаем

$$\begin{aligned} W \{P_\nu(z), P_\nu(-z)\} &= -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} W \{P_\nu(z), Q_\nu(z)\} = \\ &= -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{1-z^2}, \quad |\arg(1 \pm z)| < \pi, \end{aligned} \quad (7.7.3)$$

при произвольных значениях  $\nu$ . Решения линейно независимы, если  $\nu$  не является целым числом.

В заключение укажем, что для интервала  $-1 < x < 1$  имеет место формула

$$W \{P_\nu(x), Q_\nu(x)\} = \frac{1}{1-x^2}, \quad (7.7.4)$$

где  $Q_\nu(x)$  — функция, определенная равенством (7.3.28),  $\nu \neq -1, -2, \dots$ .

Результаты, полученные в настоящем параграфе, показывают, что общий интеграл уравнения (7.3.1) может быть представлен в одной из трех эквивалентных форм:

$$u = AP_\nu(z) + BQ_\nu(z), \quad (7.7.5)$$

$$|\arg(z-1)| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, \dots;$$

$$u = CP_\nu(z) + DP_\nu(-z), \quad (7.7.6)$$

$$|\arg(1 \pm z)| < \pi, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$u = EQ_\nu(z) + FQ_{-\nu-1}(z), \quad (7.7.7)$$

$$|\arg(z-1)| < \pi, \quad 2\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

( $A, B, \dots, F$  — произвольные постоянные).

Аналогичное представление возможно для вещественных  $z = x$ , принадлежащих интервалу  $(-1, 1)$ , причем в этом случае под  $Q_\nu(x)$  следует понимать функцию, определенную равенством (7.3.28).

## § 7.8. Рекуррентные соотношения

Сферические функции удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, которые связывают функции с индексами, различающимися на единицу. Чтобы вывести эти соотношения, предположим временно, что переменное  $z$  есть вещественное число, большее, чем

единица, и положим  $z = \operatorname{ch} \alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда, на основании интегрального представления (7.4.1), имеем

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) + P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta \operatorname{ch} \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta} \operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{4}{\pi(2\nu+1)} \int_0^{\alpha} \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta} d \operatorname{sh} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{4}{\pi(2\nu+1)} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta \cdot \operatorname{sh} \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{2}{\pi(2\nu+1)} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{ch} \left( \nu + \frac{3}{2} \right) \theta - \operatorname{ch} \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{1}{2\nu+1} [P_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)], \end{aligned}$$

откуда следует

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z) - (2\nu+1)zP_{\nu}(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = 0. \quad (7.8.1)$$

Согласно принципу аналитического продолжения, доказанное равенство справедливо для любых  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, -1)$ . Далее, таким же образом находим

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta \operatorname{sh} \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \operatorname{sh} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta d \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta} = \\ &= (2\nu+1) \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta} \operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta, \end{aligned}$$

откуда, если выполнить дифференцирование по  $\alpha$ , получаем

$$\begin{aligned} P'_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P'_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) &= (2\nu+1) \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= (2\nu+1) P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha), \end{aligned}$$

или

$$P'_{\nu+1}(z) - P'_{\nu-1}(z) = (2\nu+1) P_{\nu}(z), \quad (7.8.2)$$

Результат справедлив во всей плоскости с разрезом  $(-\infty, -1)$ .

Остальные рекуррентные соотношения, которым удовлетворяет функция  $P_\nu(z)$ , могут быть выведены из формул (7.8.1) и (7.8.2). Так, например, продифференцировав (7.8.1) по  $z$  и исключив из полученного равенства  $P'_{\nu-1}(z)$  или  $P'_{\nu+1}(z)$  с помощью (7.8.2), приходим к соотношениям:

$$P'_{\nu+1}(z) - zP'_\nu(z) = (\nu + 1)P_\nu(z), \quad (7.8.3)$$

$$zP'_\nu(z) - P'_{\nu-1}(z) = \nu P_\nu(z). \quad (7.8.4)$$

Если заменить в (7.8.3)  $\nu$  на  $(\nu - 1)$  и исключить  $P'_{\nu-1}(z)$ , имеем

$$(1 - z^2)P'_\nu(z) = \nu P_{\nu-1}(z) - \nu z P_\nu(z). \quad (7.8.5)$$

Рекуррентные соотношения для функции Лежандра второго рода  $Q_\nu(z)$  могут быть получены совершенно аналогичным образом, если исходить из интегрального представления (7.4.8). По своей форме они совпадают с соответствующими соотношениями для функции  $P_\nu(z)$ , т. е. имеют вид:

$$(\nu + 1)Q_{\nu+1}(z) - (2\nu + 1)zQ_\nu(z) + \nu Q_{\nu-1}(z) = 0, \quad (7.8.6)$$

$$Q'_{\nu+1}(z) - Q'_{\nu-1}(z) = (2\nu + 1)Q_\nu(z), \quad (7.8.7)$$

$$Q'_{\nu+1}(z) - zQ'_\nu(z) = (\nu + 1)Q_\nu(z), \quad (7.8.8)$$

$$zQ'_\nu(z) - Q'_{\nu-1}(z) = \nu Q_\nu(z), \quad (7.8.9)$$

$$(1 - z^2)Q'_\nu(z) = \nu Q_{\nu-1}(z) - \nu z Q_\nu(z). \quad (7.8.10)$$

Формулы (7.8.6—10) справедливы для любых комплексных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ , и произвольных  $\nu \neq -1, -2, \dots$  \*). Легко видеть, что рекуррентные соотношения (7.8.6—10) остаются справедливыми также для функций  $Q_\nu(x)$ , определенных равенством (7.3.28).

## § 7.9. Сферические функции с целым положительным индексом. Связь с полиномами Лежандра

Важный класс сферических функций составляют сферические функции Лежандра с целым положительным значком  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), часто встречающиеся в приложениях.

Так как уравнение (7.3.1) при  $\nu = n$  совпадает с уравнением (4.3.8), частным решением которого является полином Лежандра, естественно ожидать, что существует простая связь между рассматриваемым классом функций и этими полиномами. Чтобы установить эту связь,

\*) При  $\nu \rightarrow 0$  имеем  $\nu Q_{\nu-1}(z) \rightarrow 1$ ,  $Q'_{\nu-1}(z) \rightarrow \frac{z}{1-z^2}$ .

заметим предварительно, что если положить в формулах (7.3.10) и (7.3.12)  $\nu = 0$  или  $\nu = 1$ , то получим  $f_0(\omega) = 1$ ,  $f_1(\omega) = 1 + 4\omega$ , откуда непосредственно следует  $P_0(z) = 1$  и  $P_1(z) = z$ . Так как рекуррентная формула для сферических функций (7.8.1) совпадает с рекуррентной формулой для полиномов Лежандра (4.3.1), этот результат показывает, что сферические функции Лежандра  $P_\nu(z)$  с целым положительным знаком  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) тождественны с полиномами Лежандра, рассмотренными в гл. IV.

Сферические функции второго рода  $Q_\nu(z)$  с целым положительным знаком  $\nu = n$  также могут быть представлены в замкнутой форме через элементарные функции. Чтобы показать это, предположим временно, что  $z$  есть положительное число, большее, чем единица, и положим в (7.3.7)  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$ . Мы получим тогда после простых вычислений:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{z^{2k+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \\ Q_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \cdot \frac{1}{z^{2k+2}} = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.9.1)$$

причем, по теории аналитического продолжения, доказанные формулы справедливы на всей плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ .

Соответствующие выражения для остальных функций  $Q_n(z)$  могут быть выведены из этих формул с помощью рекуррентного соотношения (7.8.6). Пользуясь методом индукции, легко показать, что результат вычисления может быть представлен в форме

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - f_{n-1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.9.2)$$

где  $P_n(z)$  — полином Лежандра,  $f_{n-1}(z)$  — полином степени  $(n-1)$ ,  $f_{-1}(z) \equiv 0$ .

Формула (7.9.2) показывает, что функции Лежандра с целым положительным знаком имеют логарифмические особенности в точках  $z = \pm 1$ . Принимая во внимание, что при  $z = x \pm i0$  ( $-1 < x < 1$ )

$$\ln \frac{z+1}{z-1} = \ln \frac{1+x}{1-x} \mp \pi i,$$

и воспользовавшись определением функции  $Q_\nu(x)$  (7.3.28), находим:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \\ Q_n(x) &= \frac{P_n(x)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - f_{n-1}(x), \end{aligned} \right\} \quad (7.9.3)$$

откуда, в частности, следует, что  $Q_n(x) \rightarrow \pm \infty$ , когда  $x \rightarrow \pm 1$ .

### § 7.10. Сферические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа

Другой специальный класс сферических функций, встречающийся в приложениях, образуют сферические функции с индексом  $\nu = n - \frac{1}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . На основании соотношений (7.5.1) и (7.5.3), сферические функции с произвольным полуцелым индексом приводятся к этим функциям. Рассматриваемый класс функций представляет интерес также с теоретической точки зрения, так как случай  $\nu = n - \frac{1}{2}$  занимает особое положение в теории сферических функций и многие формулы нуждаются в модификации, когда  $\nu$  принимает указанные частные значения.

В этом параграфе мы будем предполагать, что переменное  $z$  вещественно и больше, чем единица, в соответствии с чем положим  $z = \text{ch } \alpha$ ,  $\alpha > 0$  \*).

Общее аналитическое представление функции  $Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha)$  дается формулой (7.6.12), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} F\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n + 1, e^{-2\alpha}\right), \quad (7.10.1)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Аналогичное представление для функции  $P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha)$  не может быть непосредственно получено из формулы (7.6.14), так как для рассматриваемых значений  $\nu = n - \frac{1}{2}$  эта формула приобретает неопределенный вид. Требуемое разложение, однако, может быть выведено из соотношения (7.6.2), если перейти в последнем к пределу  $\nu \rightarrow n - \frac{1}{2}$ , что дает:

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[ \frac{\partial Q_{\nu-1}(\text{ch } \alpha)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n-\frac{1}{2}} - \left[ \frac{\partial Q_{\nu}(\text{ch } \alpha)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (7.10.2)$$

Записав формулу (7.6.12) в виде

$$Q_{\nu}(\text{ch } \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right) \Gamma(k+1)} e^{-\alpha(2k+\nu+1)}, \quad (7.10.3)$$

\*) Этот случай представляет наибольший интерес для приложений (§ 8.11).

находим:

$$\frac{\partial Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left\{ \psi(k+\nu+1) - \psi\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k+\nu+1)}, \quad (7.10.4)$$

$$\frac{\partial Q_{-\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left\{ \psi(k-\nu) - \psi\left(k-\nu+\frac{1}{2}\right) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k-\nu)}, \quad (7.10.5)$$

где  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции (§ 1.3).

При подстановке  $\nu = n - \frac{1}{2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) первые  $n$  членов ряда (7.10.5) приобретают неопределенный вид, так как  $\Gamma(k-n+1) = \infty$ ,  $\psi(k-n+1) = \infty$  при  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ ; однако, воспользовавшись соотношениями (1.2.2), (1.3.4), получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow n - \frac{1}{2}} \frac{\psi\left(k-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-\nu+\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{n-k} \Gamma(n-k), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1),$$

откуда следует:

$$\left\{ \frac{\partial Q_{-\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} \right\}_{\nu = n - \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \Gamma(n-k) \Gamma\left(k-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} \times \\ \times \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) e^{-\alpha(2k-n+\frac{1}{2})} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+n+1) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left\{ \psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi(k+1) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k+n+\frac{1}{2})}, \quad (7.10.6)$$

если ввести в ряде  $\sum_{k=n}^{\infty} \dots$  новый значок суммирования, заменив  $k$  на  $k+n$ . При  $n=0$  первое слагаемое в (7.10.6) должно быть положено равным нулю.



Далее мы имеем непосредственно

$$\left\{ \frac{\partial Q_\nu(\text{ch } \alpha)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+n+1) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left\{ \psi(k+n+\frac{1}{2}) - \psi(k+n+1) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k+n+\frac{1}{2})}. \quad (7.10.7)$$

Подставляя (7.10.6—7) в (7.10.2) и замечая, что на основании (1.2.2)  $(-1)^{n-k} \Gamma(k-n+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\Gamma(n+\frac{1}{2}-k)}$ , находим

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha) = \frac{e^{\alpha(n-\frac{1}{2})}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k) \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+\frac{1}{2}-k)} e^{-2k\alpha} + \\ + \frac{e^{-\alpha(n+\frac{1}{2})}}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+n+1) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left[ 2\alpha + \psi(k+1) - \psi(k+\frac{1}{2}) + \psi(k+n+1) - \right. \\ \left. - \psi(k+n+\frac{1}{2}) \right] e^{-2k\alpha}. \quad (7.10.8)$$

Здесь  $\alpha > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и первое слагаемое должно быть опущено при  $n = 0$ .

Формула (7.10.8) дает искомое представление для функции  $P_{n-1/2}(\text{ch } \alpha)$ . Значения логарифмической производной гамма-функции в этой формуле могут быть найдены с помощью равенств (1.3.6—9):

$$\left. \begin{aligned} \psi(1) &= -\gamma, & \psi(m+1) &= -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2 \ln 2, & \psi\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \\ &= -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.10.9)$$

где  $\gamma = 0,5772 \dots$  — постоянная Эйлера,  $m = 1, 2, \dots$

Интегральные представления для сферических функций с целым индексом могут быть получены из соответствующих формул § 7.4, если положить в них  $\nu = n - \frac{1}{2}$ . Наряду с этим существуют некоторые специальные интегральные представления, спра-

ведливые только для данного класса сферических функций, примером которых может служить формула

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \varphi}} d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.10.10)$$

легко доказываемая путем разложения правой части в ряд по отрицательным степеням  $\operatorname{ch} \alpha$ .

В заключение укажем, что сферические функции Лежандра с полуделым значком могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (7.10.11)$$

с модулем  $0 \leq k < 1$ , что представляет известный интерес, так как для этих интегралов существуют подробные таблицы\*). Требуемый результат легко получается из интегральных представлений (7.4.1,8) и (7.10.10), если выполнить приведение соответствующих эллиптических интегралов к стандартной форме (7.10.11). Таким образом, мы находим:

$$P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}} K\left(\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}\right), \quad Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = 2e^{-\frac{\alpha}{2}} K(e^{-\alpha}) \quad (7.10.12)$$

и т. д.

### § 7.11. Асимптотические представления сферических функций при больших значениях $|\nu|$

Исследование асимптотического поведения сферических функций при фиксированном значении индекса  $\nu$  и  $|z| \rightarrow \infty$  представляет элементарную задачу, решение которой непосредственно получается из формул (7.6.1—3) и (7.10.8). Менее тривиальными являются асимптотические представления этих функций при фиксированном  $z$  и  $|\nu| \rightarrow \infty$ , играющие важную роль в различных приложениях. Мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев, именно:

(1)  $z$  — вещественное число, большее чем единица,

$$|\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta;$$

(2)  $z$  принадлежит интервалу  $(-1, 1)$ ,  $\arg \nu = 0$ .

\*) См., например, Флетчер [1].

Вывод асимптотических формул при более общих предположениях относительно  $\nu$  и  $\nu$  читатель может найти в специальных курсах теории сферических функций, например в работах Гобсона [1], Барнса [1] и Ватсона [2], из которых последняя содержит наиболее полное исследование рассматриваемого вопроса.

В случае (1) для того, чтобы получить искомые асимптотические выражения, удобно исходить из интегральных представлений (7.4.1,8).

Запишем первую из этих формул в виде

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta)^{-1/2} e^{(\nu+1/2)\theta} d\theta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta)^{-1/2} e^{-(\nu+1/2)\theta} d\theta = J_1 + J_2 \quad (7.11.1)$$

и преобразуем интеграл  $J_1$  при помощи подстановки  $t = \alpha - \theta$ . Мы имеем тогда

$$J_1 = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{\pi (2 \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \int_0^\alpha \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \left(1 - \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha\right)^{-1/2} dt = \\ = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{\pi (2 \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} dt + \int_0^\alpha \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \left(1 - \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha\right)^{-1/2} - 1 \right] dt - \int_\alpha^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} dt \right\} = \\ = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{\pi (2 \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [J_3 + J_4 - J_5]. \quad (7.11.2)$$

Первый из интегралов в квадратных скобках может быть выражен через гамма-функцию. Мы находим (§ 1.5)

$$J_3 = 2^{1/2} \int_0^\infty e^{-(\nu+1)t} (1 - e^{-2t})^{-1/2} dt = 2^{-1/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right) = \\ = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)},$$

откуда, если принять во внимание асимптотическое поведение гамма-функции при  $|\nu| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \nu| \ll \frac{\pi}{2} - \delta$  (§ 1.4), следует

$$J_3 = \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^{1/2} [1 + O(|\nu|^{-1})]. \quad (7.11.3)$$

Для оценки интеграла  $J_4$  воспользуемся неравенством

$$[(1-x)^{-1/2} - 1] \leq x(1-a)^{-1/2}, \quad 0 \leq x \leq a < 1,$$

откуда следует

$$\left[ \left( 1 - \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha \right)^{-1/2} - 1 \right] \leq 2^{1/2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha, \quad 0 \leq t \leq \alpha.$$

Предположим в дальнейшем, что

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < \infty.$$

Оценка по модулю тогда дает

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq 2^{1/2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cth} \alpha \int_0^\alpha e^{-(|\nu| \sin \delta + \frac{1}{2})t} (\operatorname{sh} t)^{-1/2} \operatorname{th} \frac{t}{2} dt \leq \\ &\leq 2^{1/2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cth} \alpha_0 \int_0^\infty e^{-(|\nu| \sin \delta + \frac{1}{2})t} (\operatorname{sh} t)^{-1/2} \operatorname{th} \frac{t}{2} dt = \\ &= O(1) \int_0^\infty e^{-|\nu| \sin \delta \cdot t^{1/2}} dt = O(|\nu|^{-3/2}), \end{aligned} \quad (7.11.4)$$

на основании (1.5.1).

Наконец, мы имеем

$$\begin{aligned} |J_5| &\leq \int_\alpha^\infty e^{-(|\nu| \sin \delta + \frac{1}{2})t} (\operatorname{sh} t)^{-1/2} dt \leq (\operatorname{sh} \alpha)^{-1/2} \int_\alpha^\infty e^{-(|\nu| \sin \delta + \frac{1}{2})t} t^{1/2} dt \leq \\ &\leq (\alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-|\nu| \sin \delta \cdot t^{1/2}} dt = O(|\nu|^{-3/2}). \end{aligned} \quad (7.11.5)$$

Из (7.11.2—5) следует

$$J_1 = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{(2\pi \nu \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [1 + O(|\nu|^{-1})]. \quad (7.11.6)$$

Оценка интеграла  $J_2$  производится более простым образом. Мы находим

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta)^{-1/2} d\theta < \\ &< \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta)^{-1/2} \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$J_2 = O(1). \quad (7.11.7)$$

Из (7.11.6—7) следует искомое асимптотическое представление сферической функции Лежандра первого рода:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{(2\pi \nu \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [1 + O(|\nu|^{-1})], \quad (7.11.8)$$

$$|\nu| \rightarrow \infty, \quad |\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < \infty.$$

Асимптотическое представление для функции второго рода может быть получено аналогичным образом из формулы (7.4.8). Полагая в этой формуле  $\theta = \alpha + t$ , имеем

$$\begin{aligned} Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{e^{-(\nu+1/2)\alpha}}{(2 \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \left(1 + \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} \frac{t}{2}\right)^{-1/2} dt = \\ &= \frac{e^{-(\nu+1/2)\alpha}}{(2 \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \left[1 - \left(1 + \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} \frac{t}{2}\right)^{-1/2}\right] dt \right\} = \frac{e^{-(\nu+1/2)\alpha}}{(2 \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [J_3 + J_6]. \end{aligned} \quad (7.11.9)$$

Значение интеграла  $J_3$  было найдено выше, в (7.11.3).

Далее, на основании неравенства

$$\left[1 - (1+x)^{-1/2}\right] \leq \frac{1}{2} x, \quad x \geq 0,$$

получаем:

$$\left[1 - (1 + \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} t)^{-1/2}\right] \leq \frac{1}{2} \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} t, \quad t \geq 0,$$

откуда, так же как в (7.11.4):

$$|J_6| \leq O(1) \int_0^\infty e^{-t|\nu| \sin \delta} t^{1/2} dt = O(|\nu|^{-3/2}), \quad (7.11.10)$$

при условии  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ .

Таким образом, для функции Лежандра второго рода имеет место асимптотическое представление

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\pi^{1/2}}{(2\nu \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} e^{-(\nu+1/2)\alpha} [1 + O(|\nu|^{-1})], \quad (7.11.11)$$

$$|\nu| \rightarrow \infty, \quad |\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \alpha_0 < \alpha < \infty.$$

Асимптотические представления для функций  $P_\nu(\cos \theta)$ ,  $Q_\nu(\cos \theta)$  могут быть получены аналогичными методами. Мы находим:

$$P_\nu(\cos \theta) = \left( \frac{2}{\pi \nu \sin \theta} \right)^{1/2} \sin [(\nu + 1/2)\theta + \pi/4] \cdot [1 + O(|\nu|^{-1})], \quad (7.11.12)$$

$$Q_\nu(\cos \theta) = \left( \frac{\pi}{2\nu \sin \theta} \right)^{1/2} \cos [(\nu + 1/2)\theta + \pi/4] \cdot [1 + O(|\nu|^{-1})], \quad (7.11.13)$$

$$\nu \rightarrow \infty, \quad \delta \leq \theta \leq \pi - \delta.$$

## § 7.12. Присоединенные сферические функции

Следующий по степени сложности и значению класс сферических функций после функций Лежандра образуют присоединенные сферические функции, которые представляют собой решения дифференциального уравнения

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] u = 0, \quad (7.12.1)$$

при произвольном  $\nu$  и  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Рассматриваемые функции являются обобщением сферических функций Лежандра, изученных в § 7.3—7.11, и переходят в эти последние при  $m = 0$ .

Чтобы определить присоединенные сферические функции, предположим, что  $z$  есть произвольное комплексное число, принадлежащее плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ , и введем новую функцию  $v$ , связанную с  $u$  соотношением

$$u = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} v,$$

где

$$(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} = (z - 1)^{\frac{m}{2}} (z + 1)^{\frac{m}{2}}.$$

Уравнение (7.12.1) принимает тогда вид

$$(1 - z^2)v'' - 2(m + 1)zv' + (\nu - m)(\nu + m + 1)v = 0. \quad (7.12.2)$$

Легко убедиться, что если  $w$  есть какое-либо решение уравнения Лежандра

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + \nu(\nu + 1)w = 0, \quad (7.12.3)$$

то функция  $v = w^{(m)}$  удовлетворяет уравнению (7.12.2), для чего достаточно продифференцировать (7.12.3)  $m$  раз и воспользоваться для вычисления производных от произведения функций правилом Лейбница. Опираясь на последний результат, мы можем утверждать, что

$$P_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}, \quad Q_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}, \quad (7.12.4)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $P_\nu(z)$  и  $Q_\nu(z)$  — сферические функции Лежандра, суть решения уравнения (7.12.1).

Эти функции называются присоединенными сферическими функциями первого и второго рода.

Из определения присоединенных сферических функций следует, если принять во внимание результаты § 7.3, что  $P_\nu^m(z)$  и  $Q_\nu^m(z)$  представляют собой регулярные функции  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, 1)$ . Функция  $P_\nu^m(z)$  есть целая, а функция  $Q_\nu^m(z)$  — мероморфная функция индекса  $\nu$  с полюсами в точках  $\nu = -1, -2, \dots$

В приложениях встречается необходимость определить решение уравнения (7.12.1) при вещественных  $z = x$ , принадлежащих промежутку  $(-1, 1)$ . С этой целью заметим, что значения присоединенных сферических функций на верхнем и нижнем берегах разреза будут соответственно

$$P_\nu^m(x \pm i0) = e^{\pm \frac{m\pi i}{2}} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m},$$

$$Q_\nu^m(x \pm i0) = e^{\pm \frac{m\pi i}{2}} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x \pm i0)}{dx^m},$$

и введем две новые функции  $P_\nu^m(x)$  и  $Q_\nu^m(x)$ , положив

$$\left. \begin{aligned} P_\nu^m(x) &= e^{\frac{m\pi i}{2}} P_\nu^m(x + i0) = e^{-\frac{m\pi i}{2}} P_\nu^m(x - i0) = \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}, \\ Q_\nu^m(x) &= \frac{(-1)^m}{2} \left[ e^{-\frac{m\pi i}{2}} Q_\nu^m(x + i0) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{m\pi i}{2}} Q_\nu^m(x - i0) \right] = \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}, \end{aligned} \right\} (7.12.5)$$

где  $-1 < x < 1$ ,  $\nu$  — любое (для функций второго рода  $\nu \neq -1, -2, \dots$ ),  $m = 0, 1, 2, \dots$  и  $Q_\nu(x)$  обозначает функцию, определенную равенством (7.3.28).

Рассматриваемые функции называются присоединенными сферическими функциями для интервала  $(-1, 1)^*$  и, как легко прове-

\*) Некоторые авторы определяют присоединенные сферические функции  $P_\nu^m(x)$  и  $Q_\nu^m(x)$  ( $-1 < x < 1$ ) посредством формул

$$P_\nu^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}, \quad Q_\nu^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+2} Q_\nu(x)}{dx^{m+2}},$$

отличающихся от (7.12.5) постоянным множителем  $(-1)^m$ , что необходимо иметь в виду при пользовании справочниками и таблицами этих функций.

реть, удовлетворяют уравнению (7.12.1) при вещественном  $z = x$  ( $-1 < x < 1$ ).

В специальном случае, когда  $\nu$  есть целое положительное число ( $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $P_\nu(z) = P_n(z)$ , где  $P_n(z)$  — полином Лежандра степени  $n$ , и, согласно (4.2.1), мы имеем

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}} (z^2 - 1)^n, \\ m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12.6)$$

Из (7.12.6) видно, что  $P_n^m(z) \equiv 0$  при  $m > n$ . Для значений  $m \leq n$  функция  $P_n^m(z)$  представляет собой произведение  $(z^2 - 1)^{m/2}$  на полином степени  $(n - m)$ .

Для интервала  $-1 < x < 1$  формула, аналогичная (7.12.6), имеет вид

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^n. \quad (7.12.7)$$

Если положить в (7.12.2)  $\nu = \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}$  и умножить полученное тождество на  $(z^2 - 1)^{m/2}$ , то из определения функции  $P_\nu^m(z)$  вытекает рекуррентная формула

$$P_\nu^{m+2}(z) + \frac{2(m+1)z}{(z^2-1)^{1/2}} P_\nu^{m+1}(z) - \\ - (\nu - m)(\nu + m + 1) P_\nu^m(z) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12.8)$$

которая позволяет последовательно вычислить значения присоединенных функций по известным значениям функций с индексом  $m = 0$  и  $m = 1$  \*).

Аналогичная формула для присоединенных функций второго рода получается из (7.12.8) заменой  $P_\nu^m(z)$  на  $Q_\nu^m(z)$ . Рекуррентные формулы для функций  $P_\nu^m(x)$  и  $Q_\nu^m(x)$  ( $-1 < x < 1$ ) являются следствием этих формул и соотношений (7.12.5). После простых вычис-

\*) Эти значения будут:

$$P_\nu^0(z) = P_\nu(z), \quad P_\nu^1(z) = (z^2 - 1)^{1/2} P_\nu'(z) = \\ = \frac{-\nu}{(z^2 - 1)^{1/2}} P_{\nu-1}(z) + \frac{\nu z}{(z^2 - 1)^{1/2}} P_\nu(z).$$



лений находим:

$$\left. \begin{aligned} P_{\nu}^{m+2}(x) + \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}} P_{\nu}^{m+1}(x) + \\ + (\nu-m)(\nu+m+1) P_{\nu}^m(x) = 0, \\ Q_{\nu}^{m+2}(x) + \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}} Q_{\nu}^{m+1}(x) + \\ + (\nu-m)(\nu+m+1) Q_{\nu}^m(x) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.12.9)$$

где  $-1 < x < 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\nu$  — любое.

Присоединенные сферические функции удовлетворяют также рекуррентным соотношениям другого типа, содержащим функции с одинаковым значком  $m$  и разными  $\nu$ , которые представляют обобщение соответствующих формул § 7.8. Чтобы вывести эти соотношения, заметим предварительно, что если продифференцировать равенство (7.8.2)  $m$  раз по  $z$  и воспользоваться (7.12.5), то получим:

$$P_{\nu+1}^{m+1}(z) - P_{\nu-1}^{m+1}(z) = (z^2 - 1)^{1/2} (2\nu + 1) P_{\nu}^m(z). \quad (7.12.10)$$

Дифференцируя (7.8.1)  $m$  раз и исключая производные с помощью формул (7.12.4), находим

$$\begin{aligned} (\nu + 1) P_{\nu+1}^m(z) - (2\nu + 1) z P_{\nu}^m(z) - \\ - (2\nu + 1) m (z^2 - 1)^{1/2} P_{\nu}^{m-1}(z) + \nu P_{\nu-1}^m(z) = 0, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (7.12.10),

$$\begin{aligned} (\nu + 1 - m) P_{\nu+1}^m(z) - (2\nu + 1) z P_{\nu}^m(z) + (\nu + m) P_{\nu-1}^m(z) = 0, \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.12.11)$$

Равенство (7.12.11) представляет собой первое из соотношений рассматриваемого типа. При  $m = 0$  оно совпадает с формулой (7.8.1). Два других рекуррентных соотношения получаются таким же образом, если после  $m$ -кратного дифференцирования равенств (7.8.2) и (7.8.3) заменить в них  $\frac{d^m P_{\nu}(z)}{dz^m}$  на  $(z^2 - 1)^{-m/2} P_{\nu}^m(z)$ . Мы получим тогда:

$$\frac{dP_{\nu+1}^m(z)}{dz} - \frac{dP_{\nu-1}^m(z)}{dz} - \frac{mz}{z^2 - 1} [P_{\nu+1}^m(z) - P_{\nu-1}^m(z)] = (2\nu + 1) P_{\nu}^m(z), \quad (7.12.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\nu+1}^m(z)}{dz} - z \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} + \frac{mz}{z^2 - 1} [zP_{\nu}^m(z) - P_{\nu+1}^m(z)] = \\ = (\nu + m + 1) P_{\nu}^m(z), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.12.13)$$

Если вычесть одно из полученных равенств из другого, то находим

$$z \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} - \frac{dP_{\nu-1}^m(z)}{dz} - \frac{mz}{z^2-1} [zP_{\nu}^m(z) - P_{\nu-1}^m(z)] = (\nu - m) P_{\nu}^m(z). \quad (7.12.14)$$

При  $m = 0$  формулы (7.12.12—14) переходят соответственно в формулы (7.8.2—4). Наконец, заменяя в (7.12.13)  $\nu$  на  $(\nu - 1)$  и исключая из полученного равенства  $\frac{dP_{\nu-1}^m(z)}{dz}$  с помощью (7.12.14), получим соотношение:

$$(z^2 - 1) \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} = \nu z P_{\nu}^m(z) - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(z), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12.15)$$

которое представляет собой обобщение формулы (7.8.5)\*.

Рекуррентные формулы для присоединенных функций второго рода могут быть выведены совершенно аналогичным способом из соотношений (7.8.6—10). Очевидно, что эти рекуррентные формулы по своей структуре тождественны с соответствующими формулами для функций первого рода.

Рекуррентные соотношения для присоединенных функций, определенных в промежутке  $-1 < x < 1$ , получаются из выведенных с помощью равенств (7.12.5). Например, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\nu + 1 - m) P_{\nu+1}^m(x) - (2\nu + 1) x P_{\nu}^m(x) + \\ + (\nu + m) P_{\nu-1}^m(x) = 0, \\ (x^2 - 1) \frac{dP_{\nu}^m(x)}{dx} = \nu x P_{\nu}^m(x) - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(x) = 0, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (7.12.16)$$

и т. д.

К полученным результатам близко примыкает формула, дающая выражение вронскиана системы решений  $P_{\nu}^m(z)$ ,  $Q_{\nu}^m(z)$  уравнения (7.12.1). Чтобы вывести эту формулу, продифференцируем каждое из равенств (7.12.4) по  $z$  и исключим затем производные. Мы получим тогда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} &= \frac{1}{z^2-1} [(z^2-1)^{1/2} P_{\nu}^{m+1}(z) + m z P_{\nu}^m(z)], \\ \frac{dQ_{\nu}^m(z)}{dz} &= \frac{1}{z^2-1} [(z^2-1)^{1/2} Q_{\nu}^{m+1}(z) + m z Q_{\nu}^m(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.12.17)$$

\* В монографии Гобсона [1], стр. 280, эта формула дана в ошибочном виде.

Подставляя эти значения в вронскиан, находим

$$W \{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} [Q_\nu^{m+1}(z) P_\nu^m(z) - P_\nu^{m+1}(z) Q_\nu^m(z)].$$

На основании (7.12.8) имеем тождественно:

$$\begin{aligned} Q_\nu^{m+1}(z) P_\nu^m(z) - P_\nu^{m+1}(z) Q_\nu^m(z) &= \\ &= (m + \nu)(m - \nu - 1) [Q_\nu^m(z) P_\nu^{m-1}(z) - P_\nu^m(z) Q_\nu^{m-1}(z)], \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} W \{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} &= \\ &= (m + \nu)(m - \nu - 1) W \{P_\nu^{m-1}(z), Q_\nu^{m-1}(z)\}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Последовательно применяя эту формулу и воспользовавшись результатом (7.7.2), получаем

$$W \{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = \frac{\Gamma(m + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} \cdot \frac{\Gamma(m - \nu)}{\Gamma(-\nu)} \cdot \frac{1}{1 - z^2},$$

или, после преобразования (1.2.2),

$$W \{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = \frac{\Gamma(1 + \nu + m)}{\Gamma(1 + \nu - m)} \cdot \frac{(-1)^m}{1 - z^2}, \quad (7.12.18)$$

где

$$|\arg(z - 1)| < \pi; \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Формула (7.12.18) представляет собой обобщение (7.7.2) и показывает, что решения  $P_\nu^m(z)$  и  $Q_\nu^m(z)$  образуют пару линейно независимых интегралов уравнения (7.12.1), за исключением случая, когда  $\nu$  есть целое положительное число  $n$ , меньшее чем  $m$  \*). Кроме этого вырожденного случая, общий интеграл рассматриваемого уравнения может быть представлен в форме

$$u = AP_\nu^m(z) + BQ_\nu^m(z). \quad (7.12.19)$$

Если воспользоваться определением присоединенных функций  $P_\nu^m(x)$  и  $Q_\nu^m(x)$  ( $-1 < x < 1$ ), то из (7.12.18) вытекает

$$\begin{aligned} W \{P_\nu^m(x), Q_\nu^m(x)\} &= \frac{(-1)^m}{2} W \{P_\nu^m(x + i0), Q_\nu^m(x + i0)\} + \\ &+ W \{P_\nu^m(x - i0), Q_\nu^m(x - i0)\} = \frac{\Gamma(1 + \nu + m)}{\Gamma(1 + \nu - m)} \cdot \frac{1}{1 - x^2}. \quad (7.12.20) \end{aligned}$$

Заметим далее, что так как дифференциальное уравнение (7.12.1) не меняется при замене  $\nu$  на  $(-\nu - 1)$  или  $z$  на  $(-z)$ , то функции  $P_{-\nu-1}^m(z)$ ,  $Q_{-\nu-1}^m(z)$ ,  $P_\nu^m(-z)$ ,  $Q_\nu^m(-z)$  являются, наряду с  $P_\nu^m(z)$  и  $Q_\nu^m(z)$ , интегралами рассматриваемого уравнения. Функциональные

\*) Для  $\nu = 0, 1, \dots, m - 1$  обе стороны равенства (7.12.18) тождественно равны нулю.

соотношения, которые в силу (7.12.19) должны существовать между этими интегралами, получаются непосредственно из соотношений § 7.5, если продифференцировать каждое из них  $m$  раз и воспользоваться (7.12.4). Мы находим тогда:

$$P_{-\nu-1}^m(z) = P_{\nu}^m(z), \quad (7.12.21)$$

$$\sin \nu\pi [Q_{\nu}^m(z) - Q_{-\nu-1}^m(z)] = \pi \cos \nu\pi \cdot P_{\nu}^m(z), \quad (7.12.22)$$

$$Q_{\nu}^m(-z) = -e^{\pm \nu\pi i} Q_{\nu}^m(z), \quad (7.12.23)$$

$$P_{\nu}^m(z) e^{\mp \nu\pi i} - P_{\nu}^m(-z) = \frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot Q_{\nu}^m(z), \quad (7.12.24)$$

где знак  $\pm$  берется в зависимости от того, будет  $I(z) \geq 0$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$

В соответственно ограниченных частях плоскости комплексного переменного, разрезанной вдоль  $(-\infty, 1)$ , присоединенные сферические функции могут быть представлены с помощью гипергеометрических рядов. Получение всей совокупности разложений этого вида выходит за рамки настоящей книги, и мы ограничимся лишь простейшими примерами, отсылая читателя за более подробным изложением рассматриваемого вопроса к работам Гобсона [1] и Барнса [1]\*.

Чтобы получить разложение функции  $P_{\nu}^m(z)$ , пригодное в области  $|z-1| < 2$ ,  $|\arg(z-1)| < \pi$ , продифференцируем  $m$  раз ряд (7.3.6). Мы имеем при  $|x| < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1} (\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1} k!} x^k = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k (\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k k!} x^k = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x), \end{aligned} \quad (7.12.25)$$

так как, по определению,  $(\lambda)_{k+1} = \lambda(\lambda+1)_k$ .

Последовательно применяя эту формулу, находим

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m, x), \quad (7.12.26) \\ m &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} P_{\nu}^m(z) &= (z^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1-z}{2}\right) = \\ &= \frac{(z^2-1)^{m/2} (-1)^m}{2^m} \cdot \frac{(-\nu)_m (\nu+1)_m}{(1)_m} F\left(m-\nu, m+\nu+1, m+1, \frac{1-z}{2}\right), \end{aligned}$$

\*) Полная таблица формул приведена в монографии Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми [1], т. I, стр. 124—139.

или, так как, согласно (1.2.2),

$$\begin{aligned} (\nu + 1)_m &= \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}, \\ (-\nu)_m &= \frac{\Gamma(m - \nu)}{\Gamma(-\nu)} = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} P_\nu^m(z) &= \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)} \frac{(z^2 - 1)^{m/2}}{2^m \Gamma(1 + m)} \times \\ &\times F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1, \frac{1 - z}{2}\right), \end{aligned} \quad (7.12.27)$$

где  $|z - 1| < 2$ ,  $|\arg(z - 1)| < \pi$ ,  $\nu$  — любое,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Формула (7.12.27) является обобщением формулы (7.3.6) и переходит в нее при  $m = 0$ .

Соответствующая формула для интервала  $-1 < x < 1$  получается из (7.12.27) с помощью соотношения (7.12.5) и имеет вид

$$\begin{aligned} P_\nu^m(x) &= \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(1 + m) \Gamma(\nu - m + 1)} (1 - x^2)^{m/2} \times \\ &\times F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1, \frac{1 - x}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.12.28)$$

Чтобы вывести формулу, дающую обобщение основного разложения функции  $Q_\nu(z)$  (7.3.7), запишем последнее, воспользовавшись формулой удвоения гамма-функции (1.2.3), в виде

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + 1 + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + 1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right)} z^{-(2k + \nu + 1)}, \\ &|z| < 1, \end{aligned}$$

и продифференцируем этот ряд  $m$  раз по  $z$ .

Так как на основании (1.2.1,3)

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} z^{-(2k + \nu + 1)} &= \\ &= (-1)^m (2k + \nu + 1)(2k + \nu + 2) \dots (2k + \nu + m) z^{-(2k + \nu + m + 1)} = \\ &= (-1)^m \frac{\Gamma(2k + \nu + m + 1)}{\Gamma(2k + \nu + 1)} z^{-(2k + \nu + m + 1)} = \\ &= (-1)^m \frac{2^m \Gamma\left(k + \frac{\nu + m + 2}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + m + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{\nu + 2}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + 1}{2}\right)} z^{-(2k + \nu + m + 1)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m} &= (-1)^m 2^{m-1} z^{-(\nu+m+1)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{\nu+m+2}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu+m+1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{z^{2k}} = \\ &= (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} z^{-(\nu+m+1)} \times \\ &\times F\left(\frac{\nu+m+2}{2}, \frac{\nu+m+1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} Q_\nu^m(z) &= (-1)^m (z^2 - 1)^{m/2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+m+1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) z^{\nu+m+1}} \times \\ &\times F\left(\frac{\nu+m+2}{2}, \frac{\nu+m+1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (7.12.29) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |z| > 1; \quad |\arg(z-1)| < \pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ \nu \neq -1, -2, \dots \end{aligned}$$

В заключение обзора теории присоединенных сферических функций приведем без доказательства интегральные представления \*):

$$\begin{aligned} P_\nu^m(z) &= \frac{\Gamma(m+\nu+1)(z^2-1)^{m/2}}{2^m \sqrt{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu-m+1)} \times \\ &\times \int_0^\pi [z + (z^2-1)^{1/2} \cos \psi]^{\nu-m} \sin^{2m} \psi \, d\psi, \quad (7.12.30) \end{aligned}$$

$$P_\nu^m(z) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi \Gamma(\nu+1)} \int_0^\pi [z + (z^2-1)^{1/2} \cos \psi]^\nu \cos m\psi \, d\psi,$$

$$R(z) > 0; \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} P_\nu^m(\cos \beta) &= \frac{2\Gamma(\nu+m+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu-m+1)} \frac{1}{(2 \sin \beta)^m} \times \\ &\times \int_0^\beta \frac{\cos(\nu + 1/2)\theta \, d\theta}{(2 \cos \theta - 2 \cos \beta)^{1/2-m}}, \quad (7.12.31) \end{aligned}$$

$$0 < \beta < \pi, \quad \nu - \text{любое}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

представляющие собой обобщения соответствующих формул § 7.4.

\*) См., например, Гобсон [1], стр. 241, 245 и 257.

Более подробный перечень интегральных представлений для сферических функций можно найти в справочнике Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми [1], т. I, стр. 155—160 и других работах, указанных в конце главы.

### § 7.13. Сведения о таблицах сферических функций

За исключением таблиц полиномов Лежандра, упомянутых в § 4.26, количество опубликованных таблиц сферических функций очень ограничено, и работа по табулированию этих функций нуждается в продолжении. Наиболее подробными таблицами являются:

1. Tables of associated Legendre functions, National Bureau of Standards, Columbia Univ. Press, N. Y., 1945:

$$(-1)^m P_n^m(\cos \theta), \quad \theta = 0^\circ(1^\circ)90^\circ, \quad n = 1(1)10, \\ m = 0(1)4, \quad m \leq n; \quad 6 \text{ зн.}$$

$$P_n^m(x), \quad (-1)^m Q_n^m(x), \quad x = 1(0,1)10, \quad n = 1(1)10, \\ m = 0(1)4; \quad m \leq n; \quad 6 \text{ зн.}$$

$$P_{n+1/2}^m(x), \quad (-1)^m Q_{n+1/2}^m(x), \quad x = 1(0,1)10, \quad n = -1(1)4, \\ m = 0(1)4; \quad 4-6 \text{ зн.}$$

$$i^{-n} P_n^m(ix), \quad i^{n+2m+1} Q_n^m(ix), \quad x = 0(0,1)10, \\ n = 0(1)10, \quad m = 0(1)4, \quad m \leq 1, \quad 6 \text{ зн.}$$

2. Tables des fonctions de Legendre associees, Revue d'Optique, P., 1952:

$$P_n^m(\cos \theta), \quad \theta = 0(1^\circ)90^\circ, \quad m = 0(1)5, \quad n = -0,5(0,1)10, \quad 4-11 \text{ зн. ц.}$$

3. Белоусов С. Л., Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра, Изд. АН СССР, М., 1956:

$$P_n^m(\cos \theta), \quad \theta = 0^\circ(2^\circ,5)90^\circ, \quad m = 0(1)36, \quad n = m(1)56, \quad 6 \text{ дес. зн.}$$

4. Журина М. И., Кармазина Л. Н., Таблицы функций Лежандра  $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x)$ , т. 1, Изд. АН СССР, М., 1959:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x), \quad x = -1(0,1)1, \quad \tau = 0(0,01)50, \quad 7 \text{ зн. ц.}$$

Второй том, содержащий значения  $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x)$  для  $x > 1$ , находится в печати.

Сведения о других таблицах сферических функций приведены в справочниках А. В. Лебедева и Р. М. Федоровой [1], Н. М. Буруновой [1], Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

### Упражнения

1. Доказать равенства

$$P_\nu(-x + i0) - P_\nu(-x - i0) = 2i \sin \pi \nu P_\nu(x),$$

$$Q_\nu(-x + i0) - Q_\nu(-x - i0) = 2i \sin \pi \nu Q_\nu(x),$$

$$x > 1.$$

2. Получить представления функции Лежандра  $P_\nu(z)$  через гипергеометрические ряды:

$$P_\nu(z) = F\left(\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}, 1, 1-z^2\right),$$

$$|1-z^2| < 1, \quad |\arg(z+1)| < \pi;$$

$$P_\nu(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^\nu F\left(-\nu, -\nu, 1, \frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$R(z) > 0.$$

Указание. Применить метод, использованный для вывода формулы (7.6.9).

3. Доказать равенства:

$$P_\nu(z) = [z + (z^2 - 1)^{1/2}]^\nu F\left\{-\nu, \frac{1}{2}, 1, \frac{2(z^2 - 1)^{1/2}}{z + (z^2 - 1)^{1/2}}\right\},$$

$$\left|\frac{2(z^2 - 1)^{1/2}}{z + (z^2 - 1)^{1/2}}\right| < 1, \quad |\arg(z-1)| < \pi;$$

$$P_\nu(z) = [z - (z^2 - 1)^{1/2}]^\nu F\left\{-\nu, \frac{1}{2}, 1, -\frac{2(z^2 - 1)^{1/2}}{z - (z^2 - 1)^{1/2}}\right\},$$

$$\left|\frac{2(z^2 - 1)}{z - (z^2 - 1)^{1/2}}\right| < 1, \quad |\arg(z-1)| < \pi;$$

$$P_\nu(z) = z^\nu F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}, 1, 1 - \frac{1}{z^2}\right),$$

$$R(z^2) > \frac{1}{2}, \quad |\arg z| < \pi.$$

Указание. Разложить функцию под знаком интеграла (7.4.3) в ряды по степеням  $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ ,  $\cos^2 \frac{\psi}{2}$  и  $\cos \psi$  и выполнить почленное интегрирование.



4. Вывести формулы:

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} (z-1)^{-\nu-1} F\left(1+\nu, 1+\nu, 2+2\nu, \frac{2}{1-z}\right),$$

$$|z-1| > 2, \quad |\arg(z-1)| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, \dots;$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} (z+1)^{-\nu-1} F\left(1+\nu, 1+\nu, 2+2\nu, \frac{2}{1+z}\right),$$

$$|z+1| > 2, \quad |\arg(z+1)| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, \dots;$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{-\frac{\nu+1}{2}} F\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{1-z^2}\right),$$

$$|z^2-1| > 1, \quad |\arg(z-1)| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, \dots$$

Указание. Применить метод, использованный для вывода формулы (7.6.9).

5. Доказать равенство

$$Q_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{-\frac{1}{4}} [z - (z^2-1)^{1/2}]^{\nu+\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, -\frac{z - (z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}}\right\},$$

$$\left| \frac{z - (z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}} \right| < 1, \quad |\arg(z-1)| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, \dots$$

Указание. Ввести новое переменное интегрирования  $t = \theta - \alpha$  в формуле (7.4.8) и затем выполнить разложение по степеням  $(1 - e^{-t})$ .

6. Показать, что если  $\nu$  не является целым числом, то асимптотическое поведение функции Лежандра первого рода и ее производной при  $z \rightarrow -1$  дается формулами:

$$P_\nu(z) \approx \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \ln \frac{z+1}{2}, \quad P'_\nu(z) \approx \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \frac{1}{1+z}.$$

Указание. Можно воспользоваться, например, разложением  $P_\nu(z)$ , приведенным в монографии Гобсона [1], стр. 217.

7. На основании результата предыдущего примера и функциональных соотношений, связывающих функции Лежандра первого и второго рода, показать, что при любом  $\nu$  функция  $Q_\nu(z)$  ( $|\arg(1-z)| < \pi$ ) имеет логарифмическую особенность при  $z=1$ , а функция  $Q_\nu(x)$  ( $-1 < x < 1$ ) — логарифмические особенности на обоих концах рассматриваемого интервала.

8. Получить интегральные представления для сферических функций:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^\infty e^{-t \operatorname{ch} \alpha} J_0(t \operatorname{sh} \alpha) t^\nu dt,$$

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^\infty e^{-t \operatorname{ch} \alpha} K_0(t \operatorname{sh} \alpha) t^\nu dt,$$

$$P_\nu(\cos \theta) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^\infty e^{-t \cos \theta} J_0(t \sin \theta) t^\nu dt,$$

где

$$|I(\alpha)| \leq \frac{\pi}{2}, \quad R(\nu) > -1, \quad 0 \leq \theta < \pi; \quad J_0(x), I_0(x), K_0(x)$$

— цилиндрические функции соответствующего типа.

9. Вывести интегральные представления:

$$P_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\cos \nu \pi}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t \operatorname{ch} \alpha} \frac{K_\nu(t)}{\sqrt{t}} dt,$$

$$|R(\nu)| < \frac{1}{2}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-t \operatorname{ch} \alpha} \frac{I_\nu(t)}{\sqrt{t}} dt,$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad \alpha > 0,$$

$I_\nu(t)$ ,  $K_\nu(t)$  — цилиндрические функции мнимого аргумента.

Примечание. Вывод формул, указанных в примерах 8—9, читатель может найти, например, в монографии Ватсона [1], стр. 423—424.

10. Вывести формулы:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_n^m(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad l = m, m+1, \dots, \quad n = m, m+1, \dots,$$

являющиеся обобщением соотношений § 4.5.

Примечание. Рассматриваемые формулы играют важную роль в теории разложений функций в ряды по  $P_n^m(x)$ .

11. Доказать теорему сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n \{ z z' - (z^2 - 1)^{1/2} (z'^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi \} = P_n(z) P_n(z') + \\ + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z) P_n^m(z') \cos m\varphi,$$

и аналогичную теорему для функций Лежандра:

$$P_\nu \{zz' - (z^2 - 1)^{1/2} (z'^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi\} = P_\nu(z) P_\nu(z') + \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} P_\nu^m(z) P_\nu^m(z') \cos m\varphi,$$

$$|\arg(z - 1)| < \pi, \quad |\arg(z' - 1)| < \pi, \quad R(z) > 0, \quad R(z') > 0.$$

Доказательства этих и им подобных формул можно найти в монографии Гобсона ([1], гл. VIII).

12. Показать, что сферические функции Лежандра с комплексным индексом  $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$  удовлетворяют интегральному уравнению

$$P_{-1/2+i\tau}(x) = \frac{\text{ch } \pi\tau}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{P_{-1/2+i\tau}(y)}{x+y} dy, \quad 1 \leq x < \infty.$$

13. Получить интегральное представление для квадрата  $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ :

$$\left[ P_{-1/2+i\tau}(x) \right]^2 = \frac{\text{ch } \pi\tau}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{P_{-1/2+i\tau}(y)}{\sqrt{1+y} \sqrt{2x^2-1+y}} dy, \quad 1 \leq x < \infty.$$

14. Получить асимптотические формулы для сферических функций с комплексным индексом  $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$ :

$$P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{\tau\theta}}{\sqrt{2\pi\tau \sin \theta}} \quad (\delta \leq \theta \leq \pi - \delta),$$

$$P_{-1/2+i\tau}(\text{ch } \alpha) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau \text{sh } \alpha}} \sin\left(\alpha\tau + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\delta \leq \alpha \leq a < \infty),$$

представляющие интерес в связи с задачами математической физики, рассмотренными в § 8.5, 8.9, 8.12 и 8.13.

У к а з а н и е. Данные формулы могут быть получены как частный случай общих асимптотических формул, приведенных в работе Барнса [1].

## ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VII

Смирнов В. И. [1]; Уиттекер и Ватсон [1]; Курант и Гильберт [1]; Гобсон [1], [2]; Барнс [1]; Робен [1]; Лензе [1]; Мак Роберт [1]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], [2].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

## ГЛАВА VIII

### ПРИЛОЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

#### § 8.1. Введение

Как известно, один из наиболее важных классов задач математической физики, включающий многие проблемы электростатики, теории теплопроводности и т. д., составляют краевые задачи потенциала, заключающиеся в определении функции  $u$ , гармонической в заданной области ( $\tau$ ) и удовлетворяющей на ее границе ( $\sigma$ ) одному из условий вида

$$(I) u|_{\sigma} = f; \quad (II) \frac{du}{dn} \Big|_{\sigma} = f; \quad (III) \frac{du}{dn} \Big|_{\sigma} + hu|_{\sigma} = f, \quad (8.1.1)$$

где  $f$  — заданная на поверхности ( $\sigma$ ) функция точки,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к этой поверхности,  $h$  — некоторое постоянное положительное число\*). В зависимости от типа граничных условий (I—III) различают первую, вторую и третью краевые задачи, известные в литературе также под названием задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи теории потенциала.

Точная постановка рассматриваемых задач, обеспечивающая единственность решения при различных предположениях относительно вида области ( $\tau$ ) и свойств граничной функции  $f$ , дается в курсах математической физики\*\*). В частности, задача Дирихле для ограниченной области ( $\tau$ ) и непрерывной функции  $f$  формулируется следующим образом:

*Определить функцию  $u$ , гармоническую в области ( $\tau$ ), непрерывную в замкнутой области ( $\tau + \sigma$ ) и совпадающую с функцией  $f$  на поверхности ( $\sigma$ ).*

\*) Напомним, что функция  $u = u(x, y, z)$  называется гармонической в области ( $\tau$ ), если она непрерывна в этой области вместе с производными первых двух порядков по  $(x, y, z)$  и удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ .

\*\*\*) См., например, В. И. Смирнов [2], гл. IV, § 2; А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1], гл. IV, § 2.

В случае неограниченной области данная формулировка должна быть дополнена условием, характеризующим поведение искомой функции на бесконечности.

Общий прием для эффективного решения краевых задач состоит в отыскании такой системы ортогональных криволинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , для которой поверхность  $(\sigma)$  является одной из координатных поверхностей и уравнение Лапласа, после преобразования его к новым переменным по формулам

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma) \quad (8.1.2)$$

допускает разделение переменных\*).

Если система координат, обладающая указанными свойствами, известна, решение краевой задачи обычно удается получить, применяя к преобразованному уравнению метод частных решений.

Настоящая глава посвящена рассмотрению гармонических краевых задач математической физики, разрешимых с помощью описанного метода и связанных с использованием аппарата сферических функций. В заключительной части главы (§ 8.14) приведены некоторые примеры аналогичных задач, относящихся к уравнению Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$ .

## § 8.2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

К числу наиболее важных ортогональных криволинейных координат, для которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных, принадлежит система сферических координат  $(r, \theta, \varphi)$ , связанных с прямоугольными координатами  $(x, y, z)$  соотношениями:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (8.2.1)$$

где

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Координатные поверхности в рассматриваемой системе координат суть сферы  $r = \text{const}$ , круговые конусы  $\theta = \text{const}$  и плоскости

\*) Вычисления, связанные с этим преобразованием, упрощаются, если воспользоваться формулой

$$\Delta u = \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{H_\beta H_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{H_\gamma H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{H_\alpha H_\beta}{H_\gamma} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \right\},$$

где  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$  — коэффициенты Ламе системы (8.1.2), входящие в выражение квадрата линейного элемента

$$ds^2 = H_\alpha^2 d\alpha^2 + H_\beta^2 d\beta^2 + H_\gamma^2 d\gamma^2.$$

$v = \text{const}$ , проходящие через ось  $z$ . Квадрат линейного элемента  $\varphi$  сферической системе координат имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2; \quad (8.2.2)$$

поэтому значения коэффициентов Ламе будут  $H_r = 1$ ,  $H_\theta = r$ ,  $H_\varphi = r \sin \theta$ , и уравнение Лапласа приобретает следующую форму:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.2.3)$$

Легко показать, что, если искать частные решения последнего уравнения вида

$$u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi), \quad (8.2.4)$$

то переменные могут быть разделены, и определение каждого из множителей приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Действительно, умножая (8.2.3) на  $r^2 \sin^2 \theta$  и отделяя переменную  $\varphi$ , мы получим после подстановки (8.2.4) и деления на произведение  $R\Theta\Phi$

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right\} \sin^2 \theta = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2},$$

что возможно лишь при условии, что обе стороны равенства равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через  $\mu^2$ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} &= \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

В свою очередь, последнее равенство выполнено только в том случае, если его стороны равны постоянной, которую удобно обозначить через  $\nu(\nu + 1)$ . Мы получим тогда:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (8.2.6)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \nu(\nu + 1) R = 0. \quad (8.2.7)$$

Таким образом, определение множителей в (8.2.4) сводится к относительно простой задаче интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (8.2.5—7). Полученная этим способом совокупность частных решений уравнения Лапласа вида (8.2.4), зависящих от двух, вообще говоря, комплексных параметров  $\mu$  и  $\nu$ \*, может

\* Не ограничивая общности, можно считать, что  $R(\mu) \geq 0$  и  $R(\nu) \geq -\frac{1}{2}$ , так как замена  $\mu$  на  $(-\mu)$  или  $\nu$  на  $(-\nu - 1)$  не меняет значений постоянных  $\mu^2$  и  $\nu(\nu + 1)$ .

быть использована для решения краевых задач математической физики в случае, если область есть шар, конус и т. д.

Выбор значений параметров  $\mu$  и  $\nu$  и соответствующих им решений уравнений (8.2.5—7) должен быть произведен таким образом, чтобы каждое из частных решений (8.2.4) представляло собой гармоническую в рассматриваемой области функцию и решение краевой задачи могло быть получено путем суперпозиции найденных частных решений.

### § 8.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для сферической области

В качестве простого примера приложения данного метода рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для сферы. Чтобы избежать излишних усложнений, ограничимся случаем симметрии вращения, когда значения граничной функции  $f$  и искомой функции  $u$  не зависят от угла  $\varphi$ .

Предполагая, что начало координат выбрано в центре сферы и ось  $z$  совпадает с осью симметрии, мы можем сформулировать рассматриваемую задачу следующим образом:

*Найти функцию  $u = u(r, \theta)$ , гармоническую в области  $r < a$  ( $a$  — радиус сферы), непрерывную в замкнутой области  $r \leq a$  и удовлетворяющую условию  $u|_{r=a} = f(\theta)$ , где  $f(\theta)$  — заданная функция, непрерывная в замкнутом промежутке  $0 \leq \theta \leq \pi$ .\*). В случае симметрии вращения множитель  $\Phi$  в (8.2.4) надлежит выбрать равным единице, в соответствии с чем следует принять  $\mu = 0$ . Уравнение (8.2.6) переходит при этом в уравнение для сферических функций Лежандра (7.3.1) от аргумента  $x = \cos \theta$ . Общий интеграл последнего уравнения для произвольных  $\nu$ , принадлежащих области  $R(\nu) > -1$ \*\*), может быть записан в виде*

$$\Theta = AP_\nu(\cos \theta) + BQ_\nu(\cos \theta), \quad (8.3.1)$$

где  $P_\nu(x)$ ,  $Q_\nu(x)$  — сферические функции первого и второго рода.

Так как переменное  $x = \cos \theta$  изменяется в замкнутом промежутке  $(-1, 1)$ , а  $Q_\nu(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 1$ , в то время как  $P_\nu(x)$  остается конечным\*\*\*), то для того, чтобы получить решение, ограниченное внутри сферы, необходимо прежде всего положить  $B = 0$ . Далее, так как при всяком  $\nu$ , отличном от целого положительного числа,

\*) В случае, если  $f$  имеет разрывы, формулировка задачи должна быть соответствующим образом изменена.

\*\*) Напомним, что нас интересует только область  $R(\nu) \geq -\frac{1}{2}$ .

\*\*\*). См. (7.3.13), а также примеры 6—7 упражнений к гл. VII.

$P_\nu(x) \rightarrow \infty$ , когда  $x \rightarrow -1$ , из тех же соображений следует принять  $\nu = n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, единственные решения уравнения (8.2.6) при  $\mu = 0$ , остающиеся ограниченными в замкнутом промежутке  $0 \leq \theta \leq \pi$ , соответствуют целым положительным значениям параметра  $\nu$  и имеют вид

$$\Theta = AP_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.3.2)$$

где  $P_n(x)$  — полином Лежандра порядка  $n$ .

Уравнение (8.2.7) представляет собой уравнение Эйлера, и его общий интеграл при  $\nu \neq -\frac{1}{2}$  будет

$$R = Cr^\nu + Dr^{-\nu-1}. \quad (8.3.3)$$

В рассматриваемом случае  $\nu = n$ , и из требования конечности решения в центре сферы вытекает, что надлежит выбрать  $D = 0$ ; поэтому

$$R = Cr^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3.4)$$

Таким образом, мы получаем следующую совокупность частных решений уравнения Лапласа:

$$u = u_n = M_n r^n P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.3.5)$$

каждое из которых представляет гармоническую функцию внутри сферы  $r \leq a$ . Построенная совокупность позволяет дать решение задачи, поставленной в начале данного параграфа. Действительно, предположим, что функция  $f(\theta)$  может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра (§ 4.7):

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \\ f_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \end{aligned} \right\} \quad (8.3.6)$$

и ряд сходится равномерно в замкнутом промежутке  $(0, \pi)$ . Тогда, выбирая  $M_n = f_n a^{-n}$  и суммируя решения (8.3.5), мы получим ряд

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (8.3.7)$$

который, на основании известной теоремы о последовательностях гармонических функций\*), сходится равномерно в замкнутой области  $r \leq a$  и представляет собой гармоническую в этой области функцию,

\*) См., например, В. И. Смирнов [2], стр. 604.



принимающую краевое значение  $f(\theta)$  при  $r \rightarrow a$ . Таким образом, формула (8.3.7) дает решение задачи Дирихле для сферы. Следует заметить, что окончательный результат остается справедливым также в том случае, когда  $f(\theta)$  — кусочно-непрерывная функция в интервале  $(0, \pi)$  и условие равномерной сходимости нарушается в отдельных точках промежутка.

Решение краевых задач для сферы, соответствующих другим условиям вида (8.1.1), получается из (8.3.5) совершенно аналогичным образом.

Исследование общего случая, когда  $f$  зависит от двух переменных,  $f = f(\theta, \varphi)$ , может быть проведено сходными методами, причем подходящая совокупность частных решений уравнения Лапласа, гармонических внутри сферы, имеет в этом случае вид \*)

$$u = u_{m,n} = [M_{mn} \cos m\varphi + N_{mn} \sin m\varphi] r^n P_n^m(\cos \theta), \quad (8.3.8)$$

где  $P_n^m(x)$  — присоединенная функция Лежандра,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = m, m+1, m+2, \dots$

Если заменить в (8.3.5) и (8.3.8) множитель  $r^n$  линейной комбинацией  $(Cr^n + Dr^{-n-1})$ , то полученные системы могут быть использованы при решении краевых задач для сферического слоя и области, внешней к сфере, причем в последнем случае надлежит положить  $C = 0$ .

#### § 8.4. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного внутри полой проводящей сферы

В виде примера, взятого из области математической физики, дадим решение задачи электростатики об определении поля точечного заряда  $q$ , помещенного внутри полой проводящей сферы радиуса  $a$  на расстоянии  $b$  от ее центра. Выберем начало координат в центре сферы и направим ось  $z$  через точку  $A$ , в которой находится заряд. Чтобы устранить особенность в точке  $A$ , представим потенциал электростатического поля  $\varphi$  в виде суммы потенциала источника и потенциала вторичного поля  $u$ , созданного зарядами, индуцированными на внутренней поверхности сферы

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + u, \quad (8.4.1)$$

где  $\rho = |AM| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}$  — расстояние от точки  $A$  до произвольной точки  $M(r, \theta)$ . Если считать потенциал сферы  $\varphi|_{r=a} = 0$ , то определение функции  $u = u(r, \theta)$  приводится к решению

\*) См., например, В. И. Левин и Ю. И. Гросберг [1], § 29.

рассмотренной выше задачи Дирихле при граничном условии

$$u|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = f(\theta). \quad (8.4.2)$$

Правая часть последнего равенства может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра, для чего в данном случае нет необходимости прибегать к вычислению интегралов (8.3.6), но достаточно воспользоваться формулой (4.2.3), которая непосредственно дает

$$u|_{r=a} = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (8.4.3)$$

причем из оценки (4.4.2) и неравенства  $b < a$  следует, что сходимость ряда равномерна в замкнутом промежутке  $(0, \pi)$ . Согласно § 8.3, значение функции  $u$  может быть представлено формулой

$$u = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (8.4.4)$$

Ряд (8.4.4) легко суммируется при помощи равенства (4.2.3), и мы находим

$$u = -\frac{q}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{br}{a^2}\right) \cos \theta + \left(\frac{br}{a^2}\right)^2}} = \frac{q'}{\rho'}, \quad (8.4.5)$$

где положено

$$q' = -q \frac{a}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b} \quad \text{и} \quad \rho' = \sqrt{r^2 + b'^2 - 2rb' \cos \theta}.$$

Таким образом, искомый потенциал может быть представлен в виде суммы

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}, \quad (8.4.6)$$

где первое слагаемое есть потенциал заряда  $q$  в отсутствие сферы, второе — потенциал отраженного заряда  $q'$ , учитывающего влияние этой сферы\*).

### § 8.5. Применение метода частных решений к краевой задаче для конической области

Следующий вид области, для которой краевая задача может быть решена с помощью разделения переменных в сферической системе координат, есть область, ограниченная поверхностью бесконечного

\*) Если  $A'$  — отражение точки  $A$  в сфере, то  $\rho' = |A'M|$ .

кругового конуса. Если поместить начало координат в вершине конуса и направить ось  $z$  по его оси симметрии, то уравнение поверхности конуса будет  $\theta = \theta_0$ , и задача Дирихле для случая симметрии вращения формулируется следующим образом:

Найти функцию  $u = u(r, \theta)$ , гармоническую в открытой области  $0 < r < \infty$ ,  $0 \leq \theta < \theta_0$ , непрерывную в области  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , удовлетворяющую граничному условию  $u|_{\theta=\theta_0} = f(r)$  и условию на бесконечности:  $u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , равномерно относительно  $\theta$ \*). Функция  $f(r)$  предполагается непрерывной при  $0 \leq r < \infty$  и  $f(\infty) = 0$ .

При применении к рассматриваемой проблеме метода разделения переменных, для ограниченности решений на оси конуса необходимо, так же как в § 8.3, положить в (8.3.1)  $B = 0$ , однако в данном случае нет более оснований считать  $\nu$  целым положительным числом, так как  $P_\nu(\cos \theta)$  при  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  ограничено при любых  $\nu$ .

Мы покажем, что решение поставленной задачи при некоторых добавочных ограничениях, наложенных на функцию  $f(r)$ , может быть получено, если выбрать  $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$ ,  $\tau \geq 0$ , чему соответствует следующая совокупность частных решений уравнения Лапласа, непрерывно зависящих от параметра  $\tau$ :

$$u = u_\tau = [M_\tau \cos \tau \ln r + N_\tau \sin \tau \ln r] r^{-1/2} P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta), \quad (8.5.1)$$

где  $M_\tau$  и  $N_\tau$  — произвольные непрерывные функции,  $\tau \geq 0$ . Сферические функции с комплексным значком, входящие в рассматриваемую совокупность, определяются аналитически с помощью разложения (7.3.6), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) &= F\left(\frac{1}{2} + i\tau, \frac{1}{2} - i\tau, 1, \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{4} + \tau^2}{1!^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right)\left(\frac{9}{4} + \tau^2\right)}{2!^2} \sin^4 \frac{\theta}{2} + \dots \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Из формулы (8.5.2) следует, что функции  $P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)$  вещественны и при  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  удовлетворяют неравенствам:

$$1 \leq P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) \leq P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0), \quad (8.5.3)$$

первое из которых справедливо во всем интервале  $(0, \pi)$ .

\*) Последнее условие необходимо для единственности решения. См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1], гл. IV, стр. 292.

Предположим, что  $f(r)$  такова, что функция  $F(r) = r^{1/2}f(r)$  может быть представлена интегралом Фурье\*):

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= r^{1/2} f(r) = \int_0^{\infty} [F_c(\tau) \cos \tau \ln r + \\ &\quad + F_s(\tau) \sin \tau \ln r] d\tau, \quad 0 < r < \infty, \\ F_c(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(r) r^{-1/2} \cos \tau \ln r dr, \\ F_s(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(r) r^{-1/2} \sin \tau \ln r dr, \end{aligned} \right\} \quad (8.5.4)$$

причем интеграл сходится равномерно в промежутке  $0 < \delta \leq r \leq A < \infty$ .

Выбирая в (8.5.1)

$$M_\tau = \frac{F_c(\tau)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0)}, \quad N_\tau = \frac{F_s(\tau)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0)}$$

и интегрируя по параметру  $\tau$  по промежутку  $(0, \infty)$ , мы получим функцию

$$u = r^{-1/2} \int_0^{\infty} [F_c(\tau) \cos \tau \ln r + F_s(\tau) \sin \tau \ln r] \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0)} d\tau, \quad (8.5.5)$$

которая, по крайней мере формально, дает решение поставленной задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу электростатики об определении поля точечного заряда  $q$ , помещенного на оси полого проводящего конуса на расстоянии  $a$  от его вершины. Представив искомый потенциал  $\varphi$  в виде суммы

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + u, \quad (8.5.6)$$

\*) Интегральное разложение (8.5.4), приводящееся к стандартной форме интеграла Фурье при помощи подстановки  $\ln r = \xi$  ( $-\infty < \xi < \infty$ ), справедливо, если  $f(r)$  непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком промежутке  $0 < a \leq r \leq b < \infty$ , и несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(r)| r^{-1/2} dr$$

сходится.

где  $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$ , и предполагая потенциал на поверхности конуса равным нулю, мы сведем задачу к частному случаю рассмотренной проблемы, соответствующему граничному условию

$$u|_{\theta=\theta_0} = f(r) = -\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0}}. \quad (8.5.7)$$

Воспользовавшись интегральным представлением (7.4.6), находим

$$\begin{aligned} F_c(\tau) &= -\frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \tau \ln r}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0}} dr = \\ &= -\frac{q}{\pi \sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{\cos \tau \ln r}{\sqrt{\frac{r}{a} + \frac{a}{r} - 2 \cos \theta_0}} \frac{dr}{r} = -\frac{q}{\pi \sqrt{a}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \tau (s + \ln a)}{\sqrt{2 \operatorname{ch} s - 2 \cos \theta_0}} ds = \\ &= -\frac{2q \cos \tau \ln a}{\pi \sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{\cos \tau s}{\sqrt{2 \operatorname{ch} s - 2 \cos \theta_0}} ds = \\ &= -\frac{q}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\cos \tau \ln a}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta_0). \quad (8.5.8) \end{aligned}$$

Такая же формула, с заменой косинуса на синус, получается для  $F_s(\tau)$ , и решение задачи дается интегралом

$$u = -\frac{q}{\sqrt{ar}} \int_0^\infty \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0)} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta_0) \cdot \frac{\cos \tau \ln \frac{r}{a}}{\operatorname{ch} \pi \tau} d\tau. \quad (8.5.9)$$

Нетрудно видеть, что полученный интеграл сходится абсолютно и равномерно в области  $0 < \delta \leq r \leq A < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ .

Действительно, из неравенств (8.5.3) следует, что рассматриваемый интеграл мажорируется интегралом

$$\int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta_0) \frac{d\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau},$$

который сходится к  $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta_0}{2}$ . Опираясь на этот результат, можно доказать, что формула (8.5.9) действительно дает решение поставленной задачи\*).

\*) При рассмотрении сходимости интегралов, содержащих сферические функции с комплексным значком  $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$ , полезно иметь в виду асимптотические формулы, указанные в примере 14 упражнений гл. VII,

### § 8.6. Разделение переменных в уравнении Лапласа в вырожденных эллипсоидальных координатах

Из других систем ортогональных криволинейных координат, для которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных и частные решения выражаются через сферические функции, в первую очередь должны быть упомянуты две системы вырожденных эллипсоидальных координат, пригодные для обсуждения краевых задач для области, имеющей вид вытянутого или сплюснутого эллипсоида вращения\*).

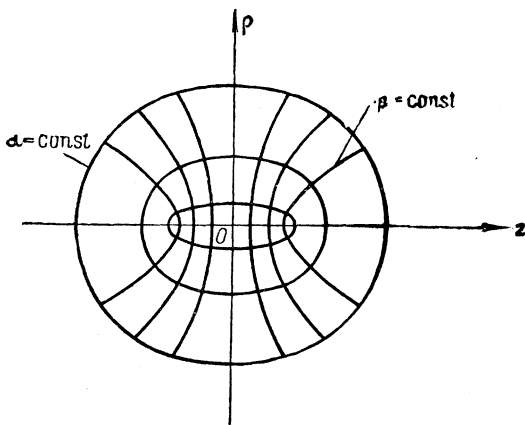


Рис. 25.

Система вырожденных эллипсоидальных координат  $(\alpha, \beta, \varphi)$  для вытянутого эллипсоида вращения определяется при помощи формул

$$x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \quad (8.6.1)$$

где  $c$  — масштабный множитель,  $0 \leq \alpha < \infty$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ \*\*). Каждой точке пространства соответствует единственная совокупность значений  $(\alpha, \beta, \varphi)$ . Координатные поверхности суть вытянутые эллипсоиды вращения  $\alpha = \operatorname{const}$  с фокусами в точках  $(0, 0, \pm c)$ , софокусные им двуполостные гиперboloиды вращения  $\beta = \operatorname{const}$  и плоскости, проходящие через ось  $z$ ,  $\varphi = \operatorname{const}$  (рис. 25). Простое вычисление дает для квадрата линейного элемента выражение

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \beta d\varphi^2, \quad (8.6.2)$$

\*) В литературе эти системы координат иногда называются сфероидальными.

По поводу эллипсоидальных координат см. Гобсон [1], гл. XI.

\*\*\*) Если  $(\rho, z, \varphi)$  — цилиндрические координаты точки, то  $z + i\rho = c \operatorname{ch}(\alpha + i\beta)$ .

откуда для коэффициентов Ламе получаются значения:

$$H_\alpha = H_\beta = c (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}, \quad H_\varphi = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta,$$

и уравнение Лапласа принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left[ \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \quad (8.6.3)$$

Если искать частные решения последнего уравнения

$$u = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi), \quad (8.6.4)$$

то, так же как в § 8.2, переменные разделяются и для определения множителей получаются обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.6.5)$$

$$\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{d}{d\beta} \left( \sin \beta \frac{dB}{d\beta} \right) + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \beta} \right] B = 0, \quad (8.6.6)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \operatorname{sh} \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) - \left[ \nu(\nu + 1) + \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right] A = 0, \quad (8.6.7)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — параметры, выбор которых диктуется конкретными условиями задачи. В частности, для случая симметрии вращения, когда искомая функция  $u$  не зависит от координаты  $\varphi$ , следует положить  $\mu = 0$ ,  $\Phi = 1$ ; в более общем случае, когда  $u$  должно быть периодической функцией  $\varphi$ , параметр  $\mu$  принимает целые положительные значения  $\mu = m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) и т. д.

Вырожденные эллипсоидальные координаты для сплюснутого эллипсоида вращения определяются равенствами\*):

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, & y &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z &= c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \\ 0 &\leq \alpha < \infty, & 0 &\leq \beta \leq \pi, & -\pi < \varphi \leq \pi. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.8)$$

Координатные поверхности суть сплюснутые эллипсоиды вращения  $\alpha = \operatorname{const}$ , однополостные гиперboloиды вращения  $\beta = \operatorname{const}$  и плоскости  $\varphi = \operatorname{const}$  (рис. 26).

\*) С цилиндрическими координатами  $(\rho, z, \varphi)$  рассматриваемые криволинейные координаты связаны соотношением  $z + i\rho = c \operatorname{sh}(\alpha + i\beta)$ .

Квадрат линейного элемента и оператор Лапласа в рассматриваемой системе координат имеют вид:

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta d\varphi^2, \quad (8.6.9)$$

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \left[ \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \operatorname{ch} \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (8.6.10)$$

Разделяя переменные, получаем для определения множителей

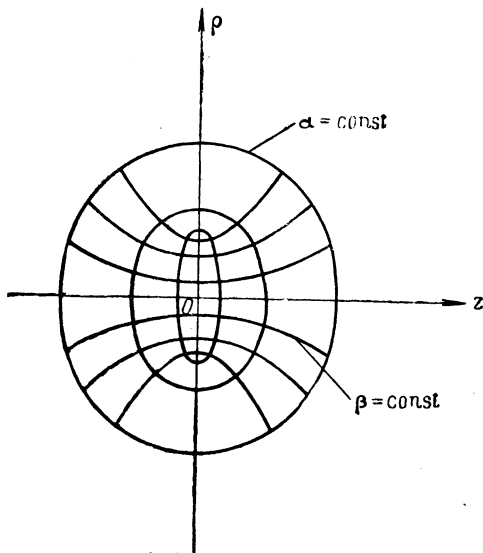


Рис. 26.

в решении (8.6.4) вместо (8.6.5—7) следующую систему уравнений:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.6.11)$$

$$\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{d}{d\beta} \left( \sin \beta \frac{dB}{d\beta} \right) + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \beta} \right] B = 0, \quad (8.6.12)$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \operatorname{ch} \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) - \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right] A = 0. \quad (8.6.13)$$

### § 8.7. Краевые задачи для эллипсоидов вращения

Найденные в § 8.6 частные решения уравнения Лапласа могут быть использованы для построения функций, гармонических внутри или вне эллипсоида вращения, что дает возможность получить решение



ряда краевых задач математической физики, относящихся к областям этого вида.

Рассмотрим в качестве примера краевые задачи, связанные с вытянутым эллипсоидом вращения, и ограничимся для простоты случаем, когда искомая функция  $u$  не зависит от угла  $\varphi$ . Как уже указывалось, в этом случае  $\mu = 0$ , и уравнение (8.6.6) переходит в уравнение для сферических функций Лежандра от аргумента  $x = \cos \beta$ , единственными решениями которого, ограниченными в замкнутом интервале  $(0, \pi)$ , являются решения, соответствующие целым положительным значениям параметра  $\nu$ ,  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )\*,

$$B = CP_n(\cos \beta), \quad (8.7.1)$$

где  $P_n(x)$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка (§ 8.3).

Уравнение (8.6.7) при помощи подстановки  $\beta = i\alpha$  переводится в уравнение (8.6.6); поэтому его общий интеграл при  $\mu = 0$ ,  $\nu = n$  будет:

$$A = MP_n(\operatorname{ch} \alpha) + NQ_n(\operatorname{ch} \alpha). \quad (8.7.2)$$

Если  $\alpha = \alpha_0$  есть уравнение поверхности эллипсоида, на которой заданы краевые условия, то области, лежащей внутри эллипсоида, соответствует совокупность значений  $0 \leq \alpha < \alpha_0$ , области вне эллипсоида — совокупность  $\alpha_0 < \alpha < \infty$ . Так как при  $\alpha \rightarrow 0$   $P_n(\operatorname{ch} \alpha) \rightarrow 1$ ,  $Q_n(\operatorname{ch} \alpha) \rightarrow \infty$  (7.3.13, 23), то для внутренней задачи надлежит положить  $N = 0$ . Таким образом, подходящая для рассмотрения внутренней задачи совокупность частных решений уравнения Лапласа, каждое из которых представляет собой гармоническую внутри эллипсоида функцию, будет

$$u = u_n = M_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7.3)$$

Для внешней задачи требуется получить решения, гармонические вне эллипсоида и исчезающие на бесконечности, что, ввиду (7.6.13—14), приводит к необходимости положить  $M = 0$ ; поэтому пригодная для этого случая совокупность частных решений (8.6.3) имеет вид

$$u = u_n = N_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7.4)$$

Отличие случая сплюснутого эллипсоида вращения от рассмотренного состоит только в том, что уравнение (8.6.7) заменяется уравнением (8.6.13), поэтому для  $\nu$  получаем его прежнее значение  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), и множитель, зависящий от  $\beta$ , как и раньше, дается формулой (8.7.1).

\*) Это замечание относится как к внутренней, так и к внешней задачам для рассматриваемого эллипсоида.

Уравнение (8.6.13) при подстановке  $\beta = \frac{\pi}{2} - i\alpha$  преобразуется в уравнение (8.6.12), поэтому его общий интеграл для случая  $\mu = 0$ ,  $\nu = n$  имеет вид

$$A = MP_n(t \operatorname{sh} \alpha) + NQ_n(t \operatorname{sh} \alpha), \quad (8.7.5)$$

откуда следует, что частными решениями уравнения Лапласа будут функции:

$$u = u_n = [M_n P_n(t \operatorname{sh} \alpha) + N_n Q_n(t \operatorname{sh} \alpha)] P_n(\cos \beta). \quad (8.7.6)$$

Покажем, что для того, чтобы полученные решения были гармоническими функциями внутри эллипсоида  $\alpha = \alpha_0$ , необходимо положить  $N_n = 0$ . Доказательство является менее тривиальным, чем в аналогичном случае для вытянутого эллипсоида вращения, так как в рассматриваемом случае оба решения  $P_n(t \operatorname{sh} \alpha)$  и  $Q_n(t \operatorname{sh} \alpha)$  остаются ограниченными при  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ , и для получения требуемого результата необходимо исследовать поведение  $\operatorname{grad} u$  вблизи особой линии преобразования (8.6.8)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .

В основе рассуждения лежит формула

$$(\operatorname{grad} u)^2 = \frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right], \quad (8.7.7)$$

следующая из (8.6.9), если считать, что  $u$  не зависит от угла  $\varphi$ . На рассматриваемой линии знаменатель правой части обращается в нуль, поэтому для конечности  $\operatorname{grad} u$  необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках также обращалось в нуль, когда  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Воспользовавшись (8.7.6) и формулами (7.6.9—10), находим

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right]_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\frac{\pi}{2}}} = (-1)^{n-1} N_n^2,$$

откуда следует  $N_n = 0$ .

Полученное условие является вместе с тем достаточным. Действительно, если

$$u = u_n = M_n P_n(t \operatorname{sh} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.7.8)$$

то

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 = M_n^2 \{ P_n^2(t \operatorname{sh} \alpha) P_n'^2(\cos \beta) \sin^2 \beta - P_n'^2(t \operatorname{sh} \alpha) P_n^2(\cos \beta) \operatorname{ch}^2 \alpha \}.$$

Выражение в скобках есть полином относительно  $\cos \beta$ , обращаящийся в нуль при  $\cos \beta = \pm t \operatorname{sh} \alpha$ , следовательно, этот полином делится на  $(\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)$ , и линия  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  не будет особой для  $\operatorname{grad} u$ .

Таким образом, формула (8.7.8) дает совокупность решений уравнения Лапласа, пригодных для рассмотрения внутренних краевых задач для сплюснутого эллипсоида вращения. Для внешней задачи, как и раньше, надлежит положить  $M_n = 0$ , и соответствующая совокупность имеет вид

$$u = u_n = N_n Q_n(t \operatorname{sh} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7.9)$$

Найденные совокупности частных решений уравнения Лапласа (8.7.3—4) и (8.7.8—9) позволяют рассмотреть ряд краевых задач, относящихся к эллипсоидам вращения. Пусть, например, требуется решить внутреннюю задачу Дирихле для вытянутого эллипсоида вращения. Предположим, что граничная функция  $f = f(\beta)$  может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра

$$\left. \begin{aligned} f(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \beta), \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \\ f_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\beta) \sin \beta P_n(\cos \beta) d\beta, \end{aligned} \right\} \quad (8.7.10)$$

равномерно сходящийся в замкнутом промежутке  $(0, \pi)$ . Тогда ряд

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} P_n(\cos \beta), \quad (8.7.11)$$

составленный из членов вида (8.7.3), как легко показать, пользуясь теоремой о последовательностях гармонических функций\*), дает решение поставленной задачи.

Пример конкретной задачи математической физики рассмотрен в § 8.8.

Для общего случая, когда граничные значения искомой функции зависят от двух координат,  $f = f(\beta, \varphi)$ , подходящими совокупностями частных решений уравнения Лапласа для вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения являются:

$$u = u_{mn} = [M_{mn} \cos m\varphi + N_{mn} \sin m\varphi] P_n^m(\cos \beta) \frac{P_n^m(\operatorname{ch} \alpha)}{Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha)}, \quad (8.7.12)$$

$$u = u_{mn} = [M_{mn} \cos m\varphi + N_{mn} \sin m\varphi] P_n^m(\cos \beta) \frac{P_n^m(t \operatorname{sh} \alpha)}{Q_n^m(t \operatorname{sh} \alpha)}, \quad (8.7.13)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = m, m+1, m+2, \dots,$$

причем в обоих случаях верхняя строчка относится к внутренней, нижняя — к внешней краевой задаче.

\*) См., например, В. И. Смирнов [2], стр. 604.

### § 8.8. Пример из математической физики. Притяжение вытянутого однородного эллипсоида

В качестве простого примера приложения результатов § 8.6—8.7, вычислим ньютонов потенциал вытянутого однородного эллипсоида вращения массы  $M$ . Если обозначить  $\varphi_i$  и  $\varphi_e$  потенциалы внутри и вне рассматриваемого эллипсоида, то, как известно, задача сводится к отысканию решений уравнений

$$\Delta\varphi_i = -4\pi\rho, \quad \Delta\varphi_e = 0, \quad (8.8.1)$$

регулярных в соответствующих областях и удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_i = \varphi_e|_{\sigma}, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_e}{\partial n} \Big|_{\sigma}, \quad \varphi_e|_{\infty} = 0, \quad (8.8.2)$$

где  $(\sigma)$  — поверхность эллипсоида,  $\mathbf{n}$  — нормаль к этой поверхности,  $\rho$  — плотность вещества эллипсоида. Решение задачи можно привести к определению двух гармонических функций, если представить  $\varphi_i$  в виде суммы:

$$\varphi_i = \varphi_0 + \varphi^*, \quad (8.8.3)$$

где  $\varphi^*$  — гармоническая внутри эллипсоида функция,  $\varphi_0$  — какое-либо частное решение уравнения Пуассона, в качестве которого удобно выбрать

$$\varphi_0 = -\pi\rho(x^2 + y^2). \quad (8.8.4)$$

Вводя эллипсоидальные координаты  $(\alpha, \beta, \varphi)$  по формулам (8.6.1) и используя найденные выше совокупности частных решений уравнения Лапласа (8.7.3—4), мы можем искать функции  $\varphi^*$  и  $\varphi_e$  в форме разложений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^* &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \\ \varphi_e &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta). \end{aligned} \right\} \quad (8.8.5)$$

Для определения коэффициентов  $M_n$ ,  $N_n$  имеем тогда граничные условия:

$$\varphi_i = \varphi_e|_{\alpha=\alpha_0}, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varphi_e}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad (8.8.6)$$

где  $\alpha_0$  — значение координаты  $\alpha$ , соответствующее поверхности эллипсоида \*).

\*) Если  $c$  — эксцентриситет,  $a$  — большая полуось эллипсоида, то  $\operatorname{ch} \alpha_0 = \frac{a}{c}$ .

Замечая, что

$$\varphi_0 = -\pi r c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \beta = -\frac{2\pi r c^2}{3} \operatorname{sh}^2 \alpha [P_0(\cos \beta) - P_2(\cos \beta)], \quad (8.8.7)$$

и воспользовавшись (8.8.6), получаем, приравнявая коэффициенты при  $P_n(\cos \beta)$  в левой и правой частях равенств (8.8.6):

$$\left. \begin{aligned} M_0 - \frac{2\pi r c^2}{3} \operatorname{sh}^2 \alpha_0 &= N_0 Q_0(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ P_2(\operatorname{ch} \alpha_0) M_2 + \frac{2\pi r c^2}{3} \operatorname{sh}^2 \alpha_0 &= N_2 Q_2(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ -\frac{4\pi r c^2}{3} \operatorname{ch} \alpha_0 &= N_0 Q'_0(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ P'_2(\operatorname{ch} \alpha_0) M_2 + \frac{4\pi r c^2}{3} \operatorname{ch} \alpha_0 &= N_2 Q'_2(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ M_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_0) &= N_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ M_n P'_n(\operatorname{ch} \alpha_0) &= N_n Q'_n(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ n &= 1, 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.8.8)$$

Из последних уравнений системы (8.8.8) следует, что  $M_n = N_n = 0$  для всех  $n$ , отличных от нуля или двух; поэтому решение представляется в замкнутой форме и легко допускает непосредственную проверку.

Коэффициенты  $M_0$ ,  $N_0$ ,  $M_2$ ,  $N_2$  вычисляются из остальных уравнений рассматриваемой системы.

После несложных преобразований, в ходе которых используются формула (7.7.2) и равенство

$$M = \frac{4}{3} \pi r c^3 \operatorname{ch} \alpha_0 \operatorname{sh}^2 \alpha_0,$$

приходим к следующему выражению для потенциала в области, внешней к эллипсоиду:

$$\varphi_e = \frac{M}{c} [Q_0(\operatorname{ch} \alpha) - Q_2(\operatorname{ch} \alpha) P_2(\cos \beta)]. \quad (8.8.9)$$

Значение потенциала для внутренней области получается аналогичным образом. С помощью формул (7.9.1) потенциалы  $\varphi_i$  и  $\varphi_e$  могут быть выражены через элементарные функции.

### § 8.9. Краевая задача для гиперboloида вращения

Возможность разделения переменных в уравнении Лапласа в вырожденных эллипсоидальных координатах может быть использована также для решения некоторых краевых задач, относящихся к гиперболюду вращения.

Пусть  $(\alpha, \beta, \varphi)$  будет система криволинейных координат, определенная с помощью равенств (8.6.1); следовательно, поверхность

$\beta = \beta_0$  ограничивает некоторый гиперболоид вращения (рис. 25). Задача Дирихле для рассматриваемого гиперболоида формулируется следующим образом:

Найти функцию  $u$ , гармоническую в области  $0 \leq \beta < \beta_0$ , непрерывную в области  $0 \leq \beta \leq \beta_0$ , удовлетворяющую условию  $u|_{\beta=\beta_0} = f$  и условию на бесконечности:  $u \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  равномерно в данной области. Функция  $f$  предполагается непрерывной и стремящейся к нулю при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Кроме того, мы ограничимся случаем симметрии вращения, в соответствии с чем примем, что  $f$  зависит только от значений переменного  $\alpha$ ,  $f = f(\alpha)$ . Покажем, что решение рассматриваемой задачи, а также некоторых других краевых задач, связанных с областью данного вида, может быть получено путем суперпозиции частных решений уравнения Лапласа

$$u = u_\tau = M_\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) P_{-1/2+i\tau}(\cos \beta), \quad \tau \geq 0, \quad (8.9.1)$$

каждое из которых есть гармоническая функция внутри гиперболоида  $\beta = \beta_0$ , стремящаяся к нулю при  $\alpha \rightarrow \infty$  \*). Указанная возможность основана на существовании формулы, аналогичной интегралу Фурье, дающей разложение произвольной функции  $g(x)$ , определенной на промежутке  $(1, \infty)$ , в интеграл по функциям  $P_{-1/2+i\tau}(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \int_0^\infty G(\tau) P_{-1/2+i\tau}(x) d\tau \quad (1 < x < \infty), \\ G(\tau) &= \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_1^\infty g(x) P_{-1/2+i\tau}(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (8.9.2)$$

Формула (8.9.2) известна под названием интеграла Мелера — Фока и справедлива для любой функции  $g(x)$ , непрерывной и имеющей ограниченную вариацию в промежутке  $1 < a \leq x \leq b < \infty$ , для которой интегралы

$$\int_1^a |g(x)|(x-1)^{-3/4} dx, \quad \int_a^\infty |g(x)|x^{-1/2} \ln x dx, \quad a > 1,$$

сходятся к конечным значениям \*\*).

\*) Если выбрать в (8.6.6—7)  $\mu = 0$ ,  $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$ , то находим

$$B = CP_{-1/2+i\tau}(\cos \beta) + DP_{-1/2+i\tau}(-\cos \beta),$$

$$A = MP_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) + NP_{-1/2+i\tau}(-\operatorname{ch} \alpha),$$

и, из условия ограниченности решения на оси гиперболоида, где  $\alpha$  или  $\beta$  равно нулю, следует  $D = N = 0$ . Заметим еще, что на основании (7.6.14)  $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \rightarrow 0$ , когда  $\alpha \rightarrow \infty$ .

\*\*\*) См. В. А. Фок [1], Н. Н. Лебедев [4].

Воспользовавшись этой формулой, мы можем, при соответствующих ограничениях, наложенных на функцию  $f(\alpha)$ , представить ее в виде интегрального разложения

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} F(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad (8.9.3)$$

где

$$F(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi\tau \int_0^{\infty} f(\alpha) \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha.$$

Тогда интеграл

$$u = \int_0^{\infty} F(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos \beta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \beta_0)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.9.4)$$

полученный суперпозицией решений вида (8.9.1), будет, по крайней мере формально, решением поставленной задачи. По поводу конкретных вычислений мы отсылаем читателя к статье автора, где дано решение одной задачи электростатики \*).

## § 8.10. Тороидальные координаты

Кроме сферических и вырожденных эллипсоидальных координат, со сферическими функциями связаны так называемые тороидальные координаты, полезные при решении краевых задач, относящихся к области, ограниченной поверхностью тора или поверхностью двух пересекающихся сфер. Система тороидальных координат  $(\alpha, \beta, \varphi)$  определяется при помощи формул \*\*):

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad (8.10.1)$$

где  $c$  — масштабный множитель,  $0 \leq \alpha < \infty$ ,  $-\pi < \beta \leq \pi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

\*) Н. Н. Лебедев [3].

\*\*\*) Связь тороидальных  $(\alpha, \beta, \varphi)$  и цилиндрических  $(\rho, z, \varphi)$  координат дается соотношением  $z + i\rho = ct \operatorname{cth} \frac{\alpha + i\beta}{2}$ , откуда следует:

$$\rho = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}.$$

Заметим еще, что отсчет циклических координат  $\beta$  и  $\varphi$  в некоторых случаях выгодней вести между пределами:

$$\beta_1 < \beta \leq 2\pi + \beta_1, \quad \varphi_1 < \varphi \leq 2\pi + \varphi_1.$$

В частности, при  $\beta_1 = \varphi_1 = -\pi$  мы получаем интервалы, данные выше.

Координатные поверхности суть торы  $\alpha = \text{const}$ :

$$(\rho - c \operatorname{cth} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \alpha}\right)^2, \quad (8.10.2)$$

сферы  $\beta = \text{const}$ :

$$(z - c \operatorname{ctg} \beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\sin \beta}\right)^2, \quad (8.10.3)$$

пересекающиеся по окружности  $\rho = a$ ,  $z = 0$ , и плоскости  $\varphi = \text{const}$  (рис. 27).

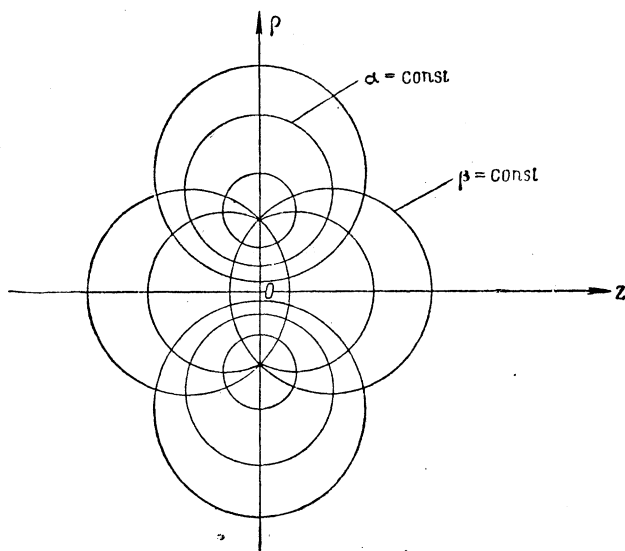


Рис. 27.

Квадрат линейного элемента в тороидальной системе координат имеет форму

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} [d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2 \alpha d\varphi^2]; \quad (8.10.4)$$

поэтому коэффициенты Ляме будут:

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad H_\varphi = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$



и уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{sh} \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.10.5)$$

В отличие от рассмотренных ранее случаев, полученное уравнение не допускает непосредственного разделения переменных; однако при помощи подстановки

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} v \quad (8.10.6)$$

оно приводится к уравнению для новой неизвестной функции  $v$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{4} v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (8.10.7)$$

принадлежащему к классу уравнений, позволяющих осуществить это разделение. Действительно, полагая

$$v = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi), \quad (8.10.8)$$

получаем

$$\operatorname{sh}^2 \alpha \left[ \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A'}{A} \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{4} \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2,$$

где  $\mu^2$  — некоторая постоянная; отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{A''}{A} + \frac{A'}{A} \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} &= -\frac{B''}{B}, \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.10.9)$$

Обозначая постоянную, которой равны обе стороны первого равенства, через  $\nu^2$ , находим:

$$B'' + \nu^2 B = 0, \quad (8.10.10)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{d}{d\alpha} \operatorname{sh} \alpha \frac{dA}{d\alpha} - \left[ \nu^2 - \frac{1}{4} + \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right] A = 0. \quad (8.10.11)$$

Таким образом, уравнение Лапласа допускает бесконечное множество решений вида

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi), \quad (8.10.12)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $\Phi$  суть интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.10.9—11).

Решение краевых задач математической физики для областей, перечисленных в начале данного параграфа, может быть получено путем суперпозиции этих частных интегралов. В случае симметрии вращения, когда искомая функция  $u$  не зависит от координаты  $\varphi$ ,

надлежит положить  $\mu = 0$  и  $\Phi = 1$ . Интегрируя уравнения (8.10.10—11), находим для этого случая

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [AP_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) + BQ_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \times \\ \times [C \cos \nu \beta + D \sin \nu \beta]. \quad (8.10.13)$$

### § 8.11. Краевая задача для тора. Пример из электростатики

В виде примера на приложение тороидальных координат дадим решение первой краевой задачи для области, ограниченной поверхностью тора  $\alpha = \alpha_0$ , причем, чтобы не усложнять рассуждений, рассмотрим случай симметрии вращения. Из соображений непрерывности следует, что построенные выше частные решения (8.10.13) должны удовлетворять условиям \*):

$$u|_{\beta=-\pi} = u|_{\beta=\pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta}|_{\beta=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial \beta}|_{\beta=\pi},$$

что возможно лишь в том случае, если параметр  $\nu$  есть целое число, которое, не ограничивая общности, можно считать положительным,  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

При рассмотрении внутренней задачи нам необходимо получить решения, ограниченные в области  $\alpha_0 \leq \alpha < \infty$ , поэтому, на основании формул (7.6.12), (7.10.8), дающих поведение сферических функций при больших значениях аргумента, следует положить  $A = 0$ . Напротив, для внешней задачи, которой соответствует промежуток  $0 \leq \alpha < \alpha_0$ , необходимо, учитывая поведение рассматриваемых функций при  $\alpha \rightarrow 0$ , принять  $B = 0$  \*\*). Таким образом, совокупность решений уравнения Лапласа, пригодных для решения внутренней краевой задачи, будет \*\*\*)

$$u = u_n = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [M_n \cos n\beta + N_n \sin n\beta] Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha), \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.11.1)$$

и соответствующая совокупность для внешней задачи

$$u = u_n = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [M_n \cos n\beta + N_n \sin n\beta] P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha), \quad (8.11.2) \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

\*) Эти условия равносильны требованию периодичности решения относительно циклической координаты  $\beta$ .

\*\*\*) См., например, асимптотические формулы примеров 6, 7 упражнений к гл. VII.

\*\*\*\*) По этой причине функции  $P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$  и  $Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$  иногда называют тороидальными.

Пусть, например, требуется решить задачу электростатики о распределении электричества на проводнике, имеющем форму тора.

Как известно, рассматриваемая задача сводится к решению внешней задачи Дирихле при граничном условии

$$u|_{\alpha=\alpha_0} = V, \quad (8.11.3)$$

где  $u$  — искомый потенциал электростатического поля в части пространства, лежащей вне проводника,  $V$  — постоянное значение, которое принимает этот потенциал на поверхности тора. Связь величин  $c$  и  $\alpha_0$  с геометрическими параметрами  $r$  и  $R$  тора (рис. 28), как следует из (8.10.2), дается формулами:

$$c \operatorname{cth} \alpha_0 = R, \quad \frac{c}{\operatorname{sh} \alpha_0} = r,$$

откуда вытекает  $c = \sqrt{R^2 - r^2}$ ,  $\operatorname{ch} \alpha_0 = \frac{R}{r}$ .

Согласно изложенному выше, мы можем пытаться искать решение задачи в виде суммы частных решений вида (8.11.2), причем из соображений симметрии относительно плоскости  $z=0$  следует принять  $N_n = 0$ , т. е. положить

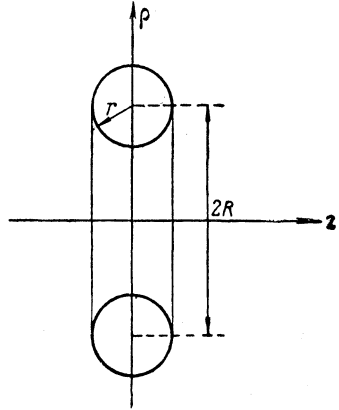


Рис. 28.

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \cos n\beta. \quad (8.11.4)$$

Граничное условие (8.11.3) удовлетворится, если определить  $M_n$  из условия

$$V (2 \operatorname{ch} \alpha_0 - 2 \cos \beta)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) \cos n\beta, \\ -\pi \leq \beta \leq \pi, \quad (8.11.5)$$

для чего достаточно разложить левую сторону в ряд Фурье в промежутке  $(-\pi, \pi)$ . Воспользовавшись формулой (7.10.10), находим:

$$M_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \frac{2V}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\beta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha_0 - 2 \cos \beta}} d\beta = \\ = \frac{2V}{\pi} Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$M_0 P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \frac{V}{\pi} Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0),$$

откуда следует, что формальное решение задачи будет

$$u = \frac{V}{\pi} (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \left[ \frac{P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0)} Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0)} Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) \cos n\beta \right]. \quad (8.11.6)$$

Можно показать с помощью асимптотических представлений § 7.11, что ряд (8.11.6) сходится и действительно дает решение проблемы.

Плотность распределения заряда по поверхности тора может быть вычислена из соотношения

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{1}{4\pi c} (\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)^{1/2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (8.11.7)$$

В заключение заметим, что ход решения краевых задач в общем случае, когда искомая функция зависит от всех трех переменных  $(\alpha, \beta, \varphi)$ , в принципе не отличается от изложенного, причем подходящими совокупностями решений уравнения Лапласа для внутренней и внешней задач будут соответственно:

$$u = u_{mn} = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} (M_{mn} \cos n\beta + N_{mn} \sin n\beta) Q_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \quad (8.11.8)$$

$$u = u_{mn} = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} (M_{mn} \cos n\beta + N_{mn} \sin n\beta) P_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \quad (8.11.9)$$

где

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

## § 8.12. Краевая задача для области, ограниченной двумя пересекающимися сферами

Тороидальные координаты могут быть использованы также для рассмотрения краевых задач, относящихся к области, границу которой образуют две пересекающиеся сферы. Пусть  $(x, y, z)$  будет система прямоугольных координат, начало которой выбрано в центре круга  $\gamma$ , по которому пересекаются сферы, и ось  $z$  проходит через центры этих сфер (рис. 29). Введем систему тороидальных координат  $(\alpha, \beta, \varphi)$ , связанных с  $(x, y, z)$  соотношениями (8.10.1), где постоянный множитель  $c$  выбран равным радиусу круга  $\gamma$ . Пусть  $\beta_p$  будет угол, образованный касательной плоскостью к сфере  $S_p$  ( $p = 1, 2$ ), проведенной в какой-либо точке окружности  $\gamma$ ,

и плоскостью  $z=0$ , причем  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 2\pi$ . Тогда из (8.10.3) следует, что уравнение поверхности  $S_p$  в тороидальных координатах будет  $\beta = \beta_p$ , и внутренней области  $D_i$ , ограниченной сферами, соответствует промежутки  $\beta_1 < \beta < \beta_2$ , внешней области  $D_e$  — промежутки  $\beta_2 < \beta < \beta_1 + 2\pi$ . Переменная  $\alpha$  в каждой из областей изменяется в промежутке  $0 \leq \alpha < \infty$ , причем значениям  $\alpha = 0$  отве-

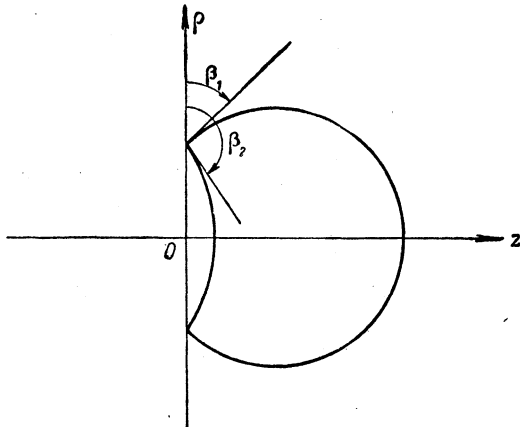


Рис. 29.

чают точки оси  $z$ , значениям  $\alpha = \infty$  — точки на ребре  $\gamma$ . Бесконечно удаленная точка пространства соответствует значениям  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 2\pi$ .

Рассмотрим задачу Дирихле для внешней и внутренней областей, причем ограничимся случаем симметрии вращения. Мы можем так же, как и выше, исходить из решений (8.10.13), однако в данном случае, в отличие от § 8.11, нет основания считать  $\nu$  целым положительным числом. Мы покажем, что решение рассматриваемых краевых задач может быть построено путем суперпозиции решений вида

$$u = u_\tau = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [M_\tau \operatorname{ch} \tau \beta + N_\tau \operatorname{sh} \tau \beta] P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha), \quad (8.12.1)$$

$$\tau \geq 0,$$

получающихся из (8.10.13), если выбрать  $\nu = i\tau$  и положить  $B = 0$  \*). Предположим для определенности, что мы имеем дело с внутренней задачей, и допустим, что функции  $f_p = f_p(\alpha)$ , входящие в граничные условия

$$u|_{\beta=\beta_p} = f_p, \quad p = 1, 2, \quad (8.12.2)$$

\*) Последнее необходимо для того, чтобы решения оставались ограниченными на оси  $z$ .

таковы, что функции  $\varphi_p(\alpha) = f_p(\alpha) (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2}$  могут быть представлены интегралами вида

$$\begin{aligned} \varphi_p(\alpha) &= f_p(\alpha) (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2} = \\ &= \int_0^{\infty} \Phi_p(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \end{aligned} \quad (8.12.3)$$

где коэффициенты  $\Phi_p(\tau)$  не зависят от  $\alpha$ . На основании теоремы Мелера — Фока (8.9.2), такое представление возможно, и функции  $\Phi_p(\tau)$  могут быть вычислены по формулам

$$\Phi_p(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} \varphi_p(\alpha) \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha, \quad (8.12.4)$$

если функции  $f_p(\alpha)$  непрерывны, имеют ограниченную вариацию на промежутке  $0 \leq \alpha < A < \infty$  и, кроме того, интегралы

$$\int_0^{\infty} \alpha |f_p(\alpha)| d\alpha \quad (8.12.5)$$

сходятся к конечным значениям. Последнее условие предусматривает, что  $f_p(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , т. е. при приближении к ребру поверхности, достаточно быстрым образом стремится к нулю, что может не иметь места, так как  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_p = f_p(\infty) = u_\gamma$ , где  $u_\gamma$  — значение, принимаемое искомой функцией на ребре  $\gamma$ , которое, вообще говоря, отлично от нуля\*). Однако в большинстве практически важных случаев рассматриваемое условие выполняется для функции  $f_p^*(\alpha) = f_p(\alpha) - f_p(\infty)$ ; поэтому существует разложение

$$\begin{aligned} \varphi_p^*(\alpha) &= [f_p(\alpha) - f_p(\infty)] (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2} = \\ &= \int_0^{\infty} \Phi_p^*(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (8.12.6)$$

где  $\Phi_p^*(\tau)$  определяется равенством

$$\Phi_p^*(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} \varphi_p^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha. \quad (8.12.7)$$

\*) Мы предполагаем, что граничная функция непрерывна, но все рассуждения легко распространяются на случай кусочной непрерывности, когда пределы  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_p$  могут быть различны для  $p = 1$  и  $p = 2$ .

С другой стороны, основываясь на интегральном представлении (7.4.1), легко показать, что при  $0 < \beta_p < 2\pi$

$$(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta_p) \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (8.12.8)$$

Умножая (8.12.8) на  $f_p(\infty)$  и складывая с (8.12.6), получаем для  $\Phi_p(\alpha)$  разложение требуемого вида (8.12.3), где

$$\Phi_p(\tau) = \Phi_p^*(\tau) + \frac{f_p(\infty)}{\operatorname{ch} \pi \tau} \operatorname{ch}(\pi - \beta_p) \tau. \quad (8.12.9)$$

Возвращаясь к решению задачи Дирихле, рассмотрим интеграл

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\Phi_2 \operatorname{sh} \tau (\beta - \beta_1) + \Phi_1 \operatorname{sh} \tau (\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} \tau (\beta_2 - \beta_1)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.12.10)$$

составленный из частных решений вида (8.12.1). Легко видеть, что граничные условия (8.12.2) будут тогда удовлетворены, и рассматриваемая формула дает решение поставленной задачи.

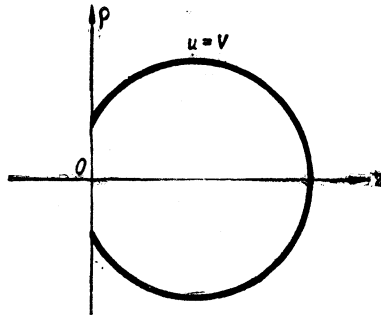


Рис. 30.

Аналогичным образом решение внешней задачи Дирихле может быть получено в виде

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\Phi_1 \operatorname{sh} \tau (\beta - \beta_2) + \Phi_2 \operatorname{sh} \tau (2\pi + \beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} \tau (2\pi + \beta_1 - \beta_2)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.12.11)$$

где

$$f_1(\alpha) = u|_{\beta=\beta_1+2\pi}, \quad f_2(\alpha) = u|_{\beta=\beta_2},$$

а остальные обозначения имеют то же значение, что и выше. В виде простого и интересного примера рассмотрим задачу о распределении электричества на тонкой проводящей сфере с круговым вырезом (рис. 30). Если обозначить через  $u$  потенциал электростатического поля в произвольной точке пространства и  $V$  — постоянное значение, которое принимает этот потенциал на поверхности проводника, то задача сводится к рассмотренной выше внешней задаче Дирихле для частного случая  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$ ,  $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = V$ . Значения  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  получаются в данном случае непосредственно из формулы (8.12.8), которая дает

$$\Phi_1 = \Phi_2 = V \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta_0)\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau},$$

откуда следует

$$u = V(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \times \left. \begin{aligned} &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \tau (\pi - \beta_0)}{\operatorname{ch}^2 \pi\tau} \operatorname{ch} \tau (\pi + \beta_0 - \beta) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \\ &\beta_0 < \beta < \beta_0 + 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (8.12.12)$$

Интеграл (8.12.12) может быть вычислен с помощью подстановки (7.4.6), что приводит к решению в замкнутой форме

$$u = \frac{V}{2} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos(2\beta_0 - \beta)}} \right\} + \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos(2\beta_0 - \beta)}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{2\beta_0 - \beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos(2\beta_0 - \beta)}} \right\}, \quad (8.12.13)$$

которое, как нетрудно проверить, удовлетворяет всем условиям задачи.

### § 8.13. Биполярные координаты и их приложения к краевым задачам математической физики

Еще один вид ортогональных криволинейных координат, для которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных и применение метода частных решений связано с использованием аппарата сферических функций, представляют собой пространственные биполярные координаты. Эти координаты по своей природе родственны тороидальным и могут быть использованы при решении краевых задач для двусвязной области, ограниченной двумя непересекающи-



мися сферами. Пространственные биполярные координаты  $(\alpha, \beta, \varphi)$  определяются при помощи формул \*):

$$x = \frac{c \sin \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \sin \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad (8.13.1)$$

где  $c$  — постоянный множитель,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $-\infty < \beta < \infty$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

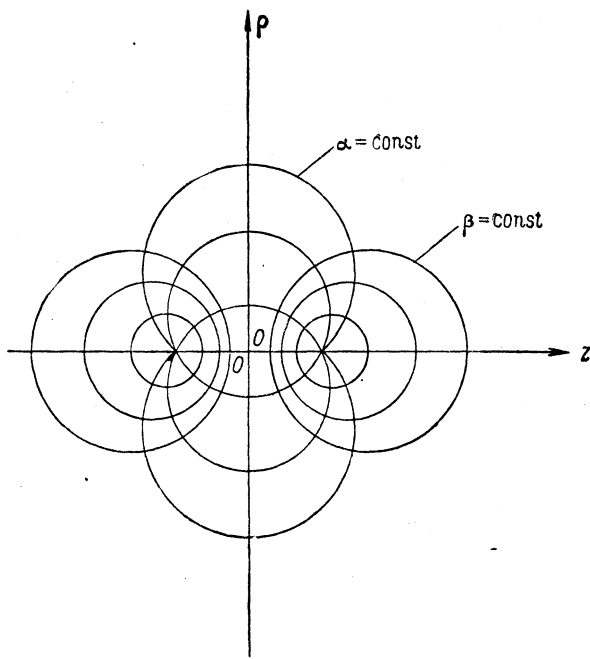


Рис. 31.

Координатные поверхности в рассматриваемой системе координат суть веретенообразные поверхности вращения  $\alpha = \text{const}$ :

$$(\rho - c \operatorname{ctg} \alpha)^2 + z^2 = \left( \frac{c}{\sin \alpha} \right)^2, \quad (8.13.2)$$

сферы  $\beta = \text{const}$ :

$$\rho^2 + (z - c \operatorname{cth} \beta)^2 = \left( \frac{c}{\operatorname{sh} \beta} \right)^2, \quad (8.13.3)$$

и плоскости  $\varphi = \text{const}$ . (рис. 31).

\*) Если ввести как промежуточную систему цилиндрических координат, то формулы (8.13.1) могут быть представлены в компактной форме:  $z + i\rho = c i \operatorname{ctg} \frac{\alpha + i\beta}{2}$ .

Значениям  $\beta = \pm \infty$  соответствуют точки ( $\rho = 0$ ,  $z = \pm c$ ), значениям  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  — бесконечно удаленная точка.

Выражение для квадрата линейного элемента в пространственных биполярных координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)^2} [d\alpha^2 + d\beta^2 + \sin^2 \alpha d\varphi^2], \quad (8.13.4)$$

откуда следует:

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad H_\varphi = \frac{c \sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha},$$

и уравнение Лапласа после преобразования к новым переменным будет

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \alpha (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.13.5)$$

Так же, как в случае тороидальных координат, переменные могут быть разделены, если ввести новую искомую неизвестную функцию  $v$  при помощи подстановки

$$u = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} v, \quad (8.13.6)$$

а затем искать частные решения полученного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{4} v + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (8.13.7)$$

вида

$$v = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi). \quad (8.13.8)$$

Для определения каждого из множителей получаются тогда уравнения:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.13.9)$$

$$B'' - \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2 B = 0, \quad (8.13.10)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \sin \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \alpha} \right] A = 0, \quad (8.13.11)$$

первые два из которых интегрируются в элементарных функциях, последнее — в сферических. В частности, для случая симметрии вращения, когда искомая функция  $u$  не зависит от  $\varphi$ , получаем

$$u = [AP_\nu(\cos \alpha) + BQ_\nu(\cos \alpha)] \cdot \left[ C \operatorname{ch} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \beta + D \operatorname{sh} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \beta \right] (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2}. \quad (8.13.12)$$

В задачах, связанных с областью, ограниченной двумя непересекающимися сферами  $\beta = \beta_1$  и  $\beta = \beta_2$ , переменная  $\alpha$  изменяется в замкнутом интервале  $(0, \pi)$ , поэтому для получения решений, конечных

на оси  $z$ , необходимо положить  $B = 0$  и выбрать  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) (§ 8.3).

Таким образом, подходящая для рассмотрения данного класса задач совокупность частных решений уравнения Лапласа будет

$$u = u_n = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \left[ M_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta + \right. \\ \left. + N_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta \right] P_n(\cos \alpha), \quad (8.13.13) \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующая совокупность, пригодная для решения краевой задачи для области, ограниченной поверхностью  $\alpha = \alpha_0$ , получается, если выбрать  $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$  ( $\tau \geq 0$ ), и имеет следующий вид:

$$u = u_\tau = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \left[ M_\tau \cos \tau \beta + \right. \\ \left. + N_\tau \sin \tau \beta \right] P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \alpha), \quad \tau \geq 0, \quad (8.13.14)$$

где верхний знак отвечает внешней ( $0 \leq \alpha < \alpha_0$ ), нижний — внутренней ( $\alpha_0 < \alpha \leq \pi$ ) краевой задаче.

В виде примера рассмотрим электростатическую задачу о поле между двумя сферическими проводниками радиуса  $r$ , центры которых находятся на расстоянии  $2a$  один от другого и потенциалы имеют значения  $\pm V$  (рис. 32).

Если величины  $c$  и  $\beta_0$  выбраны таким образом, чтобы

$$c \operatorname{cth} \beta_0 = a, \quad \frac{c}{\operatorname{sh} \beta_0} = r,$$

$$\text{т. е. } c = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad \operatorname{ch} \beta_0 = \frac{a}{r},$$

то уравнения сфер в биполярных координатах будут  $\beta = \pm \beta_0$ ,

и данная задача сводится к

определению гармонической в области  $-\beta_0 < \beta < \beta_0$  функции  $u$  ( $u$  — потенциал электрического поля), удовлетворяющей граничным условиям  $u|_{\beta = \pm \beta_0} = \pm V$ . Воспользовавшись (8.13.13) и принимая во внимание, что  $u$  — нечетная функция  $\beta$ , будем искать решение в виде

$$u = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} M_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta \cdot P_n(\cos \alpha). \quad (8.13.15)$$

Постоянные  $M_n$  должны быть тогда определены из тождества

$$V (2 \operatorname{ch} \beta_0 - 2 \cos \alpha)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta_0 \cdot P_n(\cos \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

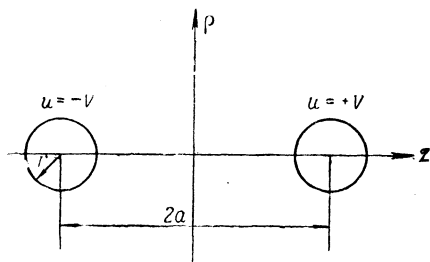


Рис. 32.

Разлагая левую часть в ряд по полиномам Лежандра с помощью формулы (4.2.3), получаем

$$\begin{aligned} V(2 \operatorname{ch} \beta_0 - 2 \cos \alpha)^{-1/2} &= V e^{-\beta_0/2} (1 - 2e^{-\beta_0} \cos \alpha + e^{-2\beta_0})^{-1/2} = \\ &= V \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta_0} P_n(\cos \alpha), \end{aligned}$$

откуда следует

$$M_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta_0 = V e^{-(n+1/2)\beta_0}.$$

Таким образом, решение может быть представлено в форме ряда

$$u = V(2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta_0} \frac{\operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta}{\operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta_0} P_n(\cos \alpha), \quad (8.13.16)$$

который, как легко показать, сходится и удовлетворяет всем условиям задачи.

### § 8.14. Приложение сферических функций к интегрированию уравнения Гельмгольца

Сферические функции встречаются в математической физике не только в связи с уравнением Лапласа, но также при интегрировании некоторых других уравнений, среди которых, в первую очередь, должно быть названо уравнение Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$ . Если перейти к сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  и искать затем частные решения вида

$$u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi), \quad (8.14.1)$$

то так же, как в § 8.2, мы имеем возможность разделить переменные, и для определения каждого из множителей получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\Phi' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.14.2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (8.14.3)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 R') + [k^2 r^2 - \nu(\nu+1)] R = 0, \quad (8.14.4)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  обозначают произвольные параметры, которые могут иметь вещественные или комплексные значения\*).

\*) Можно считать, что  $R(\mu) \geq 0$ ,  $R(\nu) \geq -\frac{1}{2}$ . См. сноску на стр. 254.

Первые два уравнения совпадают с уравнениями (8.2.6—7) и интегрируются: одно в элементарных, другое — в сферических функциях. Последнее уравнение (8.14.4) при помощи подстановки

$$R = r^{-1/2}v \quad (8.14.5)$$

приводится к уравнению Бесселя от аргумента  $z = kr$

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \left(k^2 - \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)v = 0, \quad (8.14.6)$$

и интеграл его выражается через цилиндрические функции. В частности, для случая симметрии вращения, когда  $u$  не зависит от координаты  $\varphi$ , получаем

$$u = r^{-1/2} [AJ_{\nu+1/2}(kr) + BH_{\nu+1/2}^{(2)}(kr)] [CP_{\nu}(\cos \theta) + DQ_{\nu}(\cos \theta)], \quad (8.14.7)$$

где  $J_{\nu}(z)$  — функция Бесселя,  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  — функция Ханкеля второго рода\*). В тех задачах, где  $\theta$  изменяется в замкнутом промежутке  $(0, \pi)$ , следует из условия ограниченности решения положить  $D = 0$  и выбрать  $\nu$  равным целому положительному числу  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При помощи суперпозиции решений (8.14.7) можно получить решение многих проблем математической физики, среди которых мы упомянем важную задачу о дифракции электромагнитных волн у поверхности Земли\*\*).

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VIII

Левин В. И. и Гросберг Ю. И. [1]; Тихонов А. Н. и Самарский А. А. [1]; Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. [1]; Гринберг Г. А. [1]; Франк и Мизес [1]; Гобсон [1]; Мак Роберт [1]; Бейтман [1], [2]; Джефрис Г. и Джефрис Б. [1]; Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. [1].

\*) Эта форма интеграла удобна в том случае, если временная зависимость в задаче на установившиеся колебания характеризуется множителем  $e^{i\omega t}$ . При обратном знаке в показателе следует заменить  $H_{\nu+1/2}^{(2)}(kr)$  на  $H_{\nu+1/2}^{(1)}(kr)$ .

\*\*\*) См., например, Г. А. Гринберг [1], гл. XXIII.

ГЛАВА IX  
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**§ 9.1. Гипергеометрический ряд и его аналитическое продолжение**

Гипергеометрическим рядом (§ 7.2) называется степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k,$$

где  $z$  — комплексное переменное,  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения ( $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ), и символ  $(\lambda)_k$  обозначает величину

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad (\lambda)_0 = 1.$$

Если  $\alpha$  или  $\beta$  — нуль или целое отрицательное число, ряд обрывается на конечном числе членов, и сумма его представляет собой полином относительно  $z$ . За исключением этого случая, радиус сходимости гипергеометрического ряда равняется единице, в чем легко убедиться с помощью признака сходимости Даламбера \*).

Сумма ряда

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k, \quad |z| < 1, \quad (9.1.1)$$

называется гипергеометрической функцией.

---

\*) Полагая  $u_k = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k$ , имеем

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{(\alpha + k)(\beta + k)}{(\gamma + k)(1 + k)} z \right| \rightarrow |z|,$$

когда  $k \rightarrow \infty$ , поэтому гипергеометрический ряд сходится при  $|z| < 1$  и расходится при  $|z| > 1$ .

Данное определение гипергеометрической функции пригодно лишь для значений  $z$ , принадлежащих кругу сходимости, однако в дальнейшем будет показано, что существует функция комплексного переменного  $z$ , регулярная в плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ , которая при  $|z| < 1$  совпадает с  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ . Эта функция является аналитическим продолжением  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в разрезанную плоскость и обозначается тем же символом.

Чтобы выполнить аналитическое продолжение, предположим сначала, что  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$  и воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1+k} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt, \quad (9.1.2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

следующим непосредственно из формул § 1.5.

Подставляя (9.1.2) в (9.1.1), находим

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k \int_0^1 t^{\beta-1+k} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (zt)^k, \end{aligned}$$

причем законность изменения порядка интегрирования и суммирования вытекает из абсолютной сходимости\*).

На основании известного биномиального разложения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (zt)^k = (1-tz)^{-\alpha}, \quad (9.1.3)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad |z| < 1,$$

\*) Действительно, при  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$  и  $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(\alpha)_k|}{k!} |z|^k \int_0^1 |t^{\beta-1+k} (1-t)^{\gamma-\beta-1}| dt &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|)_k}{k!} |z|^k \int_0^1 t^{R(\beta)-1+k} (1-t)^{R(\gamma)-R(\beta)-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma[R(\beta)] \Gamma[R(\gamma-\beta)]}{\Gamma[R(\gamma)]} F(|\alpha|, R(\beta), R(\gamma), |z|). \end{aligned}$$

поэтому для  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  получается представление

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt, \quad (9.1.4)$$

$$R(\gamma) > R(\beta) > 0; \quad |z| < 1.$$

Покажем, что интеграл в правой части последнего равенства сохраняет смысл и представляет регулярную функцию комплексного переменного  $z$  в плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ .

Для  $z$ , принадлежащих области

$$\rho \leq |z-1| \leq R, \quad |\arg(1-z)| \leq \pi - \delta$$

( $R$  — произвольно большое,  $\rho$  и  $\delta$  — произвольно малые положительные числа), и  $0 < t < 1$  подынтегральное выражение есть регулярная функция  $z$  и непрерывная функция  $t$ ; поэтому достаточно показать, что интеграл сходится равномерно в рассматриваемой области (см. сноску на стр. 12). Доказательство следует из оценки

$$|t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}| \leq M t^{R(\beta)-1} (1-t)^{R(\gamma)-R(\beta)-1}$$

( $M$  — верхняя граница модуля функции  $(1-tz)^{-\alpha}$ , непрерывной в замкнутой области  $\rho \leq |z-1| \leq R$ ,  $|\arg(1-z)| \leq \pi - \delta$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ), которая показывает, что сходимость интеграла будет мажорированной \*).

Таким образом, условие  $|z| < 1$  в (9.1.4) может быть отброшено, и искомое аналитическое продолжение гипергеометрической функции в разрезанную плоскость дается формулой

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt, \quad (9.1.5)$$

$$R(\gamma) > R(\beta) > 0; \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

В общем случае, когда параметры имеют произвольные значения, аналитическое продолжение  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в плоскость с разрезом  $(1, \infty)$  может быть получено в форме контурного интеграла, к которому приводит суммирование ряда (9.1.1) с помощью теории вы-

\*) При  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$  интеграл

$$M \int_0^1 t^{R(\beta)-1} (1-t)^{R(\gamma)-R(\beta)-1} dt$$

сходится.



четов\*). Более элементарный метод продолжения, не дающий, однако, возможность получить в явной форме общее аналитическое выражение гипергеометрической функции, заключается в использовании рекуррентного соотношения

$$\gamma(\gamma + 1)F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \gamma(\gamma - \alpha + 1)F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 2, z) + \\ + \alpha[\gamma - (\gamma - \beta)z]F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, z), \quad (9.1.6)$$

справедливость которого может быть установлена подстановкой в него ряда (9.1.1)\*\*).

Путем повторного применения этого тождества можно представить функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  с произвольными параметрами ( $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ) в виде суммы

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{s=0}^p a_{s,p}(\alpha, \beta, \gamma, z)F(\alpha + s, \beta + p, \gamma + 2p, z), \quad (9.1.7)$$

где  $p$  — целое положительное число,  $a_{s,p}(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — полином относительно  $z$ . Если выбрать число  $p$  достаточно большим, так чтобы  $R(\beta) > -p$  и  $R(\gamma - \beta) > -p$ , то аналитическое продолжение каждой из функций  $F(\alpha + s, \beta + p, \gamma + 2p, z)$  может быть выполнено по формуле (9.1.5). Подставляя полученные выражения в (9.1.7), получим функцию, регулярную в плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ , которая при  $|z| < 1$  совпадает с суммой гипергеометрического ряда (9.1.1) и, следовательно, является искомым аналитическим продолжением.

Гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  играет важную роль в анализе и его приложениях. Введение этой функции дает возможность получить решение многих интересных проблем теоретического и прикладного характера, к которым, в частности, относится задача конформного отображения треугольника, ограниченного пересекающимися прямыми или дугами окружностей, различные задачи квантовой механики и т. д.

\*) См., например, Уиттекер и Ватсон [1], 14.51.

\*\*) После подстановки и приведения подобных членов коэффициент при  $z^k$  в правой части (9.1.6) будет

$$\gamma(\gamma - \alpha + 1) \frac{(\alpha)_k (\beta + 1)_k}{(\gamma + 2)_k k!} + \alpha\gamma \frac{(\alpha + 1)_k (\beta + 1)_k}{(\gamma + 2)_k k!} - \\ - \alpha(\gamma - \beta) \frac{(\alpha + 1)_{k-1} (\beta + 1)_{k-1}}{(\gamma + 2)_{k-1} (k-1)!} = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma + 2)_k k!} \left\{ \gamma(\gamma - \alpha + 1) \frac{\beta + k}{\beta} + \right. \\ \left. + \alpha\gamma \frac{\alpha + k}{\alpha} \frac{\beta + k}{\beta} - \alpha(\gamma - \beta) \frac{(\gamma + k + 1)k}{\alpha\beta} \right\} = \\ = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma + 2)_k k!} (\gamma + k)(\gamma + k + 1) \equiv \gamma(\gamma + 1) \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!}.$$

Большое число специальных функций может быть выражено через функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  (§ 9.8), что позволяет рассматривать теорию этих функций как соответствующие специальные случаи общей теории, данной в настоящей главе.

## § 9.2. Элементарные свойства гипергеометрической функции

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые свойства гипергеометрической функции, которые непосредственно вытекают из ее определения с помощью ряда (9.1.1).

Прежде всего, принимая во внимание, что члены ряда не изменяются при перестановке параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , имеем соотношение симметрии

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z). \quad (9.2.1)$$

Далее, дифференцируя рассматриваемый ряд почленно, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k (k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1} (\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1} k!} z^k = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k (\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k k!} z^k = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z). \quad (9.2.2)$$

Повторное применение этой формулы приводит к равенствам

$$\frac{d^m}{dz^m} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m, z), \quad (9.2.3)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Положим в дальнейшем для сокращения записи  $F(\alpha, \beta, \gamma, z) \equiv F$ ,  $F(\alpha \pm 1, \beta, \gamma, z) \equiv F(\alpha \pm 1)$ ,  $F(\alpha, \beta \pm 1, \gamma, z) \equiv F(\beta \pm 1)$ ,  $F(\alpha, \beta, \gamma \pm 1, z) \equiv F(\gamma \pm 1)$ . Функции  $F(\alpha \pm 1)$ ,  $F(\beta \pm 1)$ ,  $F(\gamma \pm 1)$  называются смежными с  $F$ .

Мы покажем, что  $F$  и любые две смежные функции связаны между собой рекуррентным соотношением с коэффициентами, являющимися линейными функциями переменного  $z$  \*).

\*) Полное число таких соотношений, очевидно, равняется  $C_6^2 = 15$ .

В качестве основных соотношений этого типа могут быть выбраны равенства:

$$(\gamma - \alpha - \beta)F + \alpha(1 - z)F(\alpha + 1) - (\gamma - \beta)F(\beta - 1) = 0, \quad (9.2.4)$$

$$(\gamma - \alpha - 1)F + \alpha F(\alpha + 1) - (\gamma - 1)F(\gamma - 1) = 0, \quad (9.2.5)$$

$$\gamma(1 - z)F - \gamma F(\alpha - 1) + (\gamma - \beta)zF(\gamma + 1) = 0, \quad (9.2.6)$$

справедливость которых легко доказывается путем подстановки в них ряда (9.1.1). Например, подставляя ряд (9.1.1) в (9.2.4), имеем

$$\begin{aligned} & (\gamma - \alpha - \beta)F + \alpha(1 - z)F(\alpha + 1) - (\gamma - \beta)F(\beta - 1) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\gamma - \alpha - \beta) \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} + \alpha \frac{(\alpha + 1)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} - \right. \\ & \quad \left. - (\gamma - \beta) \frac{(\alpha)_k (\beta - 1)_k}{(\gamma)_k k!} - \alpha \frac{(\alpha + 1)_k (\beta)_{k-1}}{(\gamma)_{k-1} (k-1)!} \right\} z^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_{k-1}}{(\gamma)_k k!} \{ (\gamma - \alpha - \beta)(\beta + k - 1) + (\alpha + k)(\beta + k - 1) - \\ & \quad - (\gamma - \beta)(\beta - 1) - (\gamma + k - 1)k \} z^k \equiv 0. \end{aligned}$$

Формулы (9.2.5) и (9.2.6) доказываются аналогичным способом.

Из (9.2.4) — (9.2.6) и свойства симметрии (9.2.1) следуют три других равенства:

$$(\gamma - \alpha - \beta)F + \beta(1 - z)F(\beta + 1) - (\gamma - \alpha)F(\alpha - 1) = 0, \quad (9.2.7)$$

$$(\gamma - \beta - 1)F + \beta F(\beta + 1) - (\gamma - 1)F(\gamma - 1) = 0, \quad (9.2.8)$$

$$\gamma(1 - z)F - \gamma F(\beta - 1) + (\gamma - \alpha)zF(\gamma + 1) = 0. \quad (9.2.9)$$

Остальные рекуррентные соотношения получаются из (9.2.4) — (9.2.9) путем исключения из соответствующей пары формул общей смежной функции. Например, комбинируя (9.2.5) и (9.2.8) или (9.2.6) и (9.2.9), получаем

$$(\alpha - \beta)F - \alpha F(\alpha + 1) + \beta F(\beta + 1) = 0, \quad (9.2.10)$$

$$(\alpha - \beta)(1 - z)F + (\gamma - \alpha)F(\alpha - 1) - (\gamma - \beta)F(\beta - 1) = 0 \quad (9.2.11)$$

и т. д.

Полный перечень рекуррентных соотношений приводится в справочниках по теории специальных функций \*).

Кроме рассмотренных рекуррентных соотношений, существуют аналогичные соотношения, связывающие гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  с какой-либо парой родственных функций вида  $F(\alpha + l, \beta + m, \gamma + n, z)$ , где  $l, m$  и  $n$  — произвольные целые числа.

\*) См., например, Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], т. I, гл. 2.

Простейшими рекуррентными соотношениями этого типа являются:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) - F(\alpha, \beta, \gamma - 1, z) = \\ = -\frac{\alpha\beta z}{\gamma(\gamma-1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z), \quad (9.2.12)$$

$$F(\alpha, \beta + 1, \gamma, z) - F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = \frac{\alpha z}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z), \quad (9.2.13)$$

$$F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, z) - F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = \frac{\alpha(\gamma - \beta)z}{\gamma(\gamma + 1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, z), \quad (9.2.14)$$

$$F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, z) - F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = \frac{(\alpha - \beta - 1)z}{\gamma} F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, z). \quad (9.2.15)$$

К данному классу относится также равенство (9.1.6).

Формулы (9.2.12) — (9.2.15) доказываются подстановкой в них ряда (9.1.1) или выводятся из уже известных рекуррентных соотношений для смежных функций.

В заключение заметим, что, согласно § 7.2, гипергеометрическая функция  $u = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  является интегралом линейного дифференциального уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0, \quad (9.2.16)$$

регулярным в окрестности точки  $z = 0$ .

На основании принципа аналитического продолжения все формулы данного параграфа, доказанные в предположении  $|z| < 1$ , сохраняют силу во всей области определения функции  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ .

### § 9.3. Предел суммы гипергеометрического ряда при $z \rightarrow 1$ и $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$

При построении теории гипергеометрической функции важно уметь находить предел, к которому стремится сумма ряда (9.1.1), когда переменное  $z \rightarrow 1 - 0$  и параметры ряда удовлетворяют условию  $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$  \*). Если, кроме этого условия, соблюдаются неравенства  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$ , требуемый результат может быть получен путем предельного перехода под знаком интеграла в формуле (9.1.5).

\*) Можно показать, что если это условие не выполнено, то, за некоторыми исключениями, сумма гипергеометрического ряда неограниченно возрастает, когда  $z \rightarrow 1 - 0$ .

Выполнив этот переход, находим

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} dt,$$

или, принимая во внимание (1.5.6),

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad (9.3.1)$$

пока в предположении

$$R(\gamma-\alpha-\beta) \geq 0; \quad R(\gamma) \geq R(\beta) > 0. \quad (9.3.2)$$

Для обоснования законности перехода к пределу достаточно убедиться, что при выполнении условий (9.3.2) интеграл (9.1.5) сходится равномерно в замкнутом промежутке  $0 \leq z \leq 1$ . С этой целью заметим, что при  $0 \leq z \leq 1$  и  $0 \leq t \leq 1$

$$1-t \leq |1-tz| \leq 1,$$

следовательно,

$$|t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}| \leq t^{R(\beta)-1} (1-t)^{\lambda-1},$$

где  $\lambda = R(\gamma-\alpha-\beta)$  при  $R(\alpha) > 0$  и  $\lambda = R(\gamma-\beta)$  при  $R(\alpha) < 0$ . Последняя оценка показывает, что интеграл (9.1.5) сходится равномерно в рассматриваемом промежутке \*).

Докажем теперь, что второе условие в (9.3.2) не является существенным и может быть отброшено.

Предположим, что вместо условий (9.3.2) параметры гипергеометрической функции удовлетворяют более слабым неравенствам:

$$R(\gamma-\alpha-\beta) \geq 0, \quad R(\gamma-\beta) \geq -1, \quad R(\beta) > -1, \quad (9.3.3)$$

и воспользуемся рекуррентным соотношением (9.1.6).

Ограничения, при которых доказана формула (9.3.1), соблюдаются для каждой из гипергеометрических функций, входящих в правую часть (9.1.6), поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1-0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma+1} \frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+2)\Gamma(\gamma-\beta+1)} + \\ &+ \frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)} \frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta+1)} \equiv \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \end{aligned}$$

\*) При выполнении условий (9.3.2) сходится интеграл

$$\int_0^1 t^{R(\beta)-1} (1-t)^{\lambda-1} dt,$$

являющийся мажорантой для (9.1.5).

т. е. прежний результат. Повторяя это рассуждение, мы докажем по индукции, что

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \quad (9.3.4)$$

при единственном условии  $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ .

Полученная формула играет важную роль при выводе функциональных соотношений для гипергеометрической функции (§ 9.5 и 9.6).

### § 9.4. Гипергеометрическая функция, рассматриваемая как функция своих параметров

Положим

$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) \quad (9.4.1)$$

и докажем, что при фиксированном  $z$   $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$  есть целая функция от  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Если  $|z| < 1$ , требуемое доказательство вытекает из разложения

$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{\Gamma(k+\gamma) k!} z^k, \quad |z| < 1, \quad (9.4.2)$$

получающегося из (9.4.1) путем замены  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  рядом (9.1.1). Члены ряда (9.4.2) представляют собой целые функции от  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , и рассматриваемый ряд сходится равномерно в области  $|\alpha| < A$ ,  $|\beta| < B$ ,  $|\gamma| < C$  ( $A$ ,  $B$  и  $C$  — произвольно большие фиксированные числа), в чем легко убедиться с помощью признака сходимости, указанного на стр. 132\*). Отсюда следует, что  $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — целая функция своих параметров.

При произвольном  $z$ , принадлежащем плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ , для доказательства можно воспользоваться равенствами:

$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt, \quad (9.4.3)$$

$$R(\gamma) > R(\beta) > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi;$$

$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \gamma(\gamma-\alpha+1)f(\alpha, \beta+1, \gamma+2, z) + \alpha[\gamma-(\gamma-\beta)z]f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, z), \quad (9.4.4)$$

являющимися следствиями формул (9.1.5) и (9.1.6).

\*) Полагая  $u_k = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{\Gamma(k+\gamma) k!} z^k$ , имеем при  $|z| < 1$  и достаточно больших  $k$

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(\gamma+k)(1+k)} z \right| \leq \frac{(k+A)(k+B)}{(k-C)(k+1)} |z| \leq q < 1.$$

Так как выражение под знаком интеграла (9.4.3) есть целая функция параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  для любого  $0 < t < 1$  и интеграл сходится равномерно в области  $|\alpha| \leq A$ ,  $\delta \leq R(\beta) \leq B$ ,  $\delta \leq R(\gamma - \beta) \leq C$  ( $\delta$  — произвольное малое положительное число), то  $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$  представляет регулярную функцию параметров в области  $|\alpha| < \infty$ ,  $R(\beta) > 0$ ,  $R(\gamma - \beta) > 0$ .

С помощью повторного применения рекуррентного соотношения (9.4.4) можно представить функцию  $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в виде суммы

$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{s=0}^p c_{s,p}(\alpha, \beta, \gamma, z) f(\alpha + s, \beta + p, \gamma + 2p, z), \quad (9.4.5)$$

где  $c_{s,p}(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — полиномы относительно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $z$ ,  $p$  — целое положительное число. На основании доказанного каждый член суммы есть функция, регулярная в области  $|\alpha| < \infty$ ,  $R(\beta) > -p$ ,  $R(\gamma - \beta) > -p$ , поэтому  $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$  регулярна в этой области и, следовательно ( $p$  — произвольно), является целой функцией параметров.

Последний результат показывает, что гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  при фиксированном  $z$ , принадлежащем плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ , есть целая функция от  $\alpha$  и  $\beta$  и мероморфная функция  $\gamma$ , с простыми полюсами в точках  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

## § 9.5. Функциональные соотношения для гипергеометрической функции

Рассмотрим совокупность дробно-линейных преобразований  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ , переводящих точки  $z = 0, 1$  и  $\infty$  в точки  $z' = 0, 1$  и  $\infty$ , взятые в любой последовательности.

Легко видеть, что к данному классу, за исключением тождественной подстановки  $z' = z$ , относятся следующие преобразования:

$$z' = \frac{z}{z-1}, \quad z' = 1-z, \quad z' = \frac{1}{1-z}, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-1}{z}.$$

Настоящий параграф содержит вывод линейных функциональных соотношений, связывающих гипергеометрические функции с аргументами  $z$  и  $z'$ .

Формулы рассматриваемого типа, известные в литературе под названием линейных преобразований гипергеометрической функции, принадлежат к числу наиболее важных соотношений теории этой функции. В частности, они дают возможность осуществить аналитическое продолжение  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в любую часть плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ , принципиальная возможность которого была установлена ранее (§ 9.1).

Мы начнем с вывода функционального соотношения, полезного в том случае, когда требуется получить аналитическое продолжение гипергеометрической функции в полуплоскость  $R(z) < \frac{1}{2}$ .

Положим, что  $z$  принадлежит плоскости с разрезом  $(1, \infty)$  и примем, в качестве временного допущения, что  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$ .

Воспользовавшись интегральным представлением (9.1.5) и вводя новое переменное интегрирования  $s = 1 - t$ , находим

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 s^{\gamma-\beta-1} (1-s)^{\beta-1} (1-z+sz)^{-\alpha} ds = \\ &= (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta')} \int_0^1 s^{\beta'-1} (1-s)^{\gamma-\beta'-1} (1-sz')^{-\alpha} ds, \end{aligned}$$

где

$$\beta' = \gamma - \beta, \quad z' = \frac{z}{z-1},$$

причем на основании сделанных предположений  $R(\gamma) > R(\beta') > 0$  и  $z'$  принадлежат плоскости с разрезом  $(1, \infty)$  \*).

Согласно (9.1.5), выражение в правой части совпадает с  $(1-z)^{-\alpha} \times \times F(\alpha, \beta', \gamma, z')$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right), \quad (9.5.1) \\ &|\arg(1-z)| < \pi. \end{aligned}$$

Формула (9.5.1) доказана пока в предположении  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$ , однако, согласно § 9.4, обе стороны рассматриваемого равенства после деления на  $\Gamma(\gamma)$  оказываются целыми функциями от  $\beta$  и  $\gamma$  \*\*). Поэтому на основании принципа аналитического продолжения выведенная формула остается справедливой для любых  $\beta$  и  $\gamma$ , за исключением значений  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ , для которых  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  не определена.

При условии  $R(z) < \frac{1}{2}$  имеем  $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$ , и гипергеометрическая функция в правой части (9.5.1) может быть заменена суммой соответствующего гипергеометрического ряда. Таким образом, равенство (9.5.1) дает аналитическое продолжение  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в полуплоскость  $R(z) < \frac{1}{2}$ .

\*) При подстановке  $z' = \frac{z}{1-z}$  плоскость  $z$  с разрезом  $(1, \infty)$  отображается на плоскость  $z'$  с тем же разрезом.

\*\*) Выражение  $F\{f(\alpha, \beta, \gamma, \dots), g(\alpha, \beta, \gamma, \dots), \dots\}$ , где  $F, f, g, \dots$  — целые функции своих аргументов, есть целая функция от  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$



Если переставить в (9.5.1)  $\alpha$  и  $\beta$ - и воспользоваться свойством симметрии (9.2.1), то приходим к функциональному соотношению

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right), \quad (9.5.2)$$

$$|\arg(1-z)| < \pi,$$

которое также может быть использовано для аналитического продолжения гипергеометрической функции в полуплоскость  $R(z) < \frac{1}{2}$ .

Другой важный результат получается путем последовательного применения обоих преобразований (9.5.1, 2). Мы имеем

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} \left(1 - \frac{z}{z-1}\right)^{-(\gamma-\beta)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z),$$

или

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z), \quad (9.5.3)$$

$$|\arg(1-z)| < \pi.$$

Для вывода функционального соотношения, связывающего гипергеометрические функции с аргументами  $z$  и  $z' = 1-z$ , воспользуемся общим методом, основанным на теории линейных дифференциальных уравнений.

Чтобы применить этот метод, заметим, что общий интеграл гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0 \quad (9.5.4)$$

может быть представлен в форме \*)

$$u = A_1 F(\alpha, \beta, \gamma, z) + A_2 z^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, z), \quad (9.5.5)$$

$$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad |\arg(1-z)| < \pi, \quad |\arg z| < \pi.$$

При подстановке  $z' = 1-z$  рассматриваемая область трансформируется в область  $|\arg(1-z')| < \pi$ ,  $|\arg z'| < \pi$ , и уравнение (9.5.4) переходит в гипергеометрическое уравнение с параметрами  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \beta$ ,  $\gamma' = 1 + \alpha + \beta - \gamma$ . Поэтому выражение

$$u = B_1 F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1-z) + B_2 (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times$$

$$\times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma, 1-z). \quad (9.5.6)$$

$$\alpha - \beta + \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad |\arg(1-z)| < \pi, \quad |\arg z| < \pi,$$

также является общим интегралом уравнения (9.5.4).

\*) См. § 7.2. На основании принципа аналитического продолжения формула (7.2.6) остается справедливой во всей области  $|\arg(1-z)| < \pi, |\arg z| < \pi$ .

В частности, отсюда следует, что должно существовать линейное соотношение вида

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = C_1 F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - z) + \\ + C_2 (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - z), \\ \alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  предположим временно, что  $R(\alpha + \beta) < R(\gamma) < 1$ , и перейдем в последнем равенстве к пределу, один раз при  $z \rightarrow 1 - 0$ , другой — при  $z \rightarrow +0$ . Принимая во внимание соотношение (9.3.4), получим:

$$C_1 = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \\ C_1 \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta - \gamma) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 + \alpha - \gamma) \Gamma(1 + \beta - \gamma)} + C_2 \frac{\Gamma(1 - \alpha - \beta + \gamma) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1 - \beta)} = 1,$$

откуда, после несложных вычислений с применением тождества (1.2.2) находим

$$C_2 = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}.$$

Таким образом, искомое функциональное соотношение имеет вид

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - z) + \\ + (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \times \\ \times F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - z), \quad (9.5.7) \\ \alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad |\arg z| < \pi, \quad |\arg(1 - z)| < \pi.$$

Чтобы избавиться от излишних ограничений, наложенных на параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , заметим, что после умножения на  $\sin \pi(\gamma - \alpha - \beta) [\Gamma(\gamma)]^{-1}$  обе стороны рассматриваемого равенства будут целыми функциями этих параметров \*). Поэтому, согласно принципу аналитического продолжения, найденное функциональное соотношение справедливо при любых значениях параметров, за исключением тех, для которых  $\alpha + \beta - \gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Формула (9.5.7) дает аналитическое продолжение гипергеометрической функции в область  $|z - 1| < 1$ ,  $|\arg(1 - z)| < \pi$ .

Остальные функциональные соотношения могут быть получены путем комбинированного применения выведенных формул. Так, на-

\*) Здесь снова используется соотношение (1.2.2).

пример, последовательное применение равенств (9.5.1) и (9.5.7) приводит к функциональному соотношению \*)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)} F\left(\alpha, \gamma-\beta, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{1-z}\right) + \\ + (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)} F\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha+\beta, \frac{1}{1-z}\right), \quad (9.5.8) \\ \alpha-\beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad |\arg(-z)| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

которое позволяет осуществить аналитическое продолжение  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в область  $|z-1| > 1$ ,  $|\arg(1-z)| < \pi$ .

Комбинируя (9.5.8) с (9.5.1) и (9.5.2), находим

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)} F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{z}\right) + \\ + (-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)} F\left(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha, \frac{1}{z}\right), \quad (9.5.9) \\ \alpha-\beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad |\arg(-z)| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Формула (9.5.9) дает аналитическое продолжение гипергеометрической функции в область  $|z| > 1$ ,  $|\arg z| < \pi$ .

Наконец, применяя последовательно (9.5.7) и (9.5.1), получаем функциональное соотношение

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = z^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \times \\ \times F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta-\gamma, \frac{z-1}{z}\right) + \\ + z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \\ \times F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta, \frac{z-1}{z}\right), \quad (9.5.10) \\ \alpha+\beta-\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad |\arg z| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

полезное при аналитическом продолжении  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в область  $R(z) > \frac{1}{2}$ ,  $|\arg(1-z)| < \pi$ .

Совокупность формул (9.5.1)—(9.5.3) и (9.5.7)—(9.5.10) решает задачу аналитического продолжения гипергеометрической функции в плоскость с разрезом  $(1, \infty)$ . Исключительные случаи, когда введенные формулы не применимы, будут рассмотрены в § 9.7.

---

\*) Заметим, что преобразование  $z' = \frac{z}{z-1}$  переводит область  $|\arg(-z)| < \pi$ ,  $|\arg(1-z)| < \pi$  в область  $|\arg z'| < \pi$ ,  $|\arg(1-z')| < \pi$ , чем обеспечивается возможность последующего применения формулы (9.5.7).

### § 9.6. Специальные функциональные соотношения

Функциональные соотношения для гипергеометрической функции, найденные в § 9.5, справедливы при произвольных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , за исключением некоторых особых значений. При условии, что параметры связаны между собой определенными зависимостями, наряду с формулами данного типа существуют специальные функциональные соотношения, которые, несмотря на меньшую общность, полезны при различных преобразованиях и могут быть использованы для аналитического продолжения. Наиболее интересный класс подобных соотношений образуют формулы, содержащие гипергеометрические функции с двумя произвольными параметрами.

Примером формул, относящихся к рассматриваемому классу, может служить, в частности, соотношение

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right) = F\left\{2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2}\right\}, \quad (9.6.1)$$

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(1 - z)| < \pi.$$

Для доказательства (9.6.1) заметим, что левая часть равенства есть решение гипергеометрического уравнения (9.5.4) с  $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ , регулярное в области  $|\arg(1 - z)| < \pi$ .

При подстановке  $z' = \frac{1}{2}[1 - (1 - z)^{1/2}]$  последнее уравнение преобразуется в уравнение того же вида с новыми параметрами  $\alpha' = 2\alpha$ ,  $\beta' = 2\beta$ ,  $\gamma' = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ , и область  $|\arg(1 - z)| < \pi$  переходит в область  $R(z') < \frac{1}{2}$ , составляющую часть области  $|\arg(1 - z')| < \pi$ . Отсюда заключаем, что правая часть (9.6.1) также является решением (9.5.4), регулярным в области  $|\arg(1 - z)| < \pi$ .

Согласно (7.2.6), гипергеометрическое уравнение не может иметь двух линейно независимых интегралов, регулярных в окрестности точки  $z = 0$ , поэтому должно существовать соотношение

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right) = AF\left\{2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2}\right\},$$

где  $A$  — некоторая постоянная.

Полагая  $z = 0$ , находим  $A = 1$ , что приводит к формуле (9.6.1).

Большое число других функциональных соотношений, принадлежащих к рассматриваемому классу, может быть выведено путем применения к (9.6.1) формул преобразования § 9.5 и замены независимого переменного или параметров. Так, например, преобразуя правую

часть (9.6.1) с помощью (9.5.1) или (9.5.3), приходим к функциональным соотношениям:

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right) = \left[\frac{1 + (1-z)^{1/2}}{2}\right]^{-2\alpha} F\left\{2\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{(1-z)^{1/2} - 1}{(1-z)^{1/2} + 1}\right\},$$

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots; |\arg(1-z)| < \pi, \quad (9.6.2)$$

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right) = \left[\frac{1 + (1-z)^{1/2}}{2}\right]^{1/2 - \alpha - \beta} \times$$

$$\times F\left\{\alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta - \alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1 - (1-z)^{1/2}}{2}\right\},$$

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(1-z)| < \pi. \quad (9.6.3)$$

Если преобразовать левую часть в (9.6.1) и (9.6.2) по формуле (9.5.1) и выполнить затем замену  $\frac{z}{z-1} \rightarrow z$ ,  $\alpha + \beta + \frac{1}{2} \rightarrow \gamma$ , то получим два других полезных равенства:

$$F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, z\right) = (1-z)^{-\alpha} F\left\{2\alpha, 2\gamma - 2\alpha - 1, \gamma, \frac{1 - (1-z)^{-1/2}}{2}\right\}, \quad (9.6.4)$$

$$|\arg(1-z)| < \pi;$$

$$F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, z\right) = \left[\frac{1 + (1-z)^{1/2}}{2}\right]^{-2\alpha} F\left\{2\alpha, 2\alpha - \gamma + 1, \gamma, \frac{1 - (1-z)^{1/2}}{1 + (1-z)^{1/2}}\right\}, \quad (9.6.5)$$

$$|\arg(1-z)| < \pi.$$

Наконец, преобразуя левую часть (9.6.1) и (9.6.2) с помощью (9.5.3) и заменяя  $\alpha \rightarrow \alpha - \frac{1}{2}$ ,  $\beta \rightarrow \beta - \frac{1}{2}$ , приходим к соотношениям:

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \frac{1}{2}, z\right) = (1-z)^{-\frac{1}{2}} F\left\{2\alpha - 1, 2\beta - 1, \alpha + \beta - \frac{1}{2}, \frac{1 - (1-z)^{1/2}}{2}\right\}, \quad (9.6.6)$$

$$\alpha + \beta - \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(1-z)| < \pi;$$

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \frac{1}{2}, z\right) = (1-z)^{-1/2} \left[\frac{1 + (1-z)^{1/2}}{2}\right]^{1-2\alpha} \times$$

$$\times F\left\{2\alpha - 1, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \alpha + \beta - \frac{1}{2}, \frac{(1-z)^{1/2} - 1}{(1-z)^{1/2} + 1}\right\}, \quad (9.6.7)$$

$$\alpha + \beta - \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(1-z)| < \pi,$$

Формулы (9.6.2), (9.6.5) и (9.6.7) интересны в том отношении, что они дают аналитическое продолжение соответствующих гипергеометрических функций в плоскость с разрезом  $(1, \infty)$  \*).

Дальнейшие результаты могут быть получены путем обращения выведенных формул. Например, инверсия (9.6.1)—(9.6.3) приводит к функциональным соотношениям \*\*):

$$F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, z\right) = F\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, 4z(1-z)\right\}, \quad (9.6.8)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1) \neq 0, -1, -2, \dots, R(z) < \frac{1}{2};$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha - \beta + 1, z) =$$

$$= (1-z)^{-\alpha} F\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2} - \beta, \alpha - \beta + 1, -\frac{4z}{(1-z)^2}\right\}, \quad (9.6.9)$$

$$\alpha - \beta + 1 \neq 0, -1, -2, \dots, |z| < 1;$$

$$F(\alpha, 1-\alpha, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-1} F\left\{\frac{\gamma-\alpha}{2}, \frac{\gamma+\alpha-1}{2}, \gamma, 4z(1-z)\right\},$$

$$R(z) < \frac{1}{2}. \quad (9.6.10)$$

Комбинация этих формул с линейными преобразованиями § 9.5 позволяет получить новую группу функциональных соотношений. Например, применяя к правой части (9.6.8) преобразование (9.5.7) и заменяя  $\alpha \rightarrow 2\alpha$ ,  $\beta \rightarrow 2\beta$ ,  $z \rightarrow \frac{1-z}{2}$ , находим \*\*\*):

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, z^2\right) +$$

$$+ z \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad (9.6.11)$$

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(1 \pm z)| < \pi.$$

\*) При  $|\arg(1-z)| < \pi$  модуль четвертого элемента в правой части каждой из этих формул не превосходит единицы, и гипергеометрическая функция может быть заменена суммой соответствующего гипергеометрического ряда.

\*\*\*) В частности, (9.6.8) получается из (9.6.1) путем замены

$$2\alpha \rightarrow \alpha, 2\beta \rightarrow \beta, \frac{1-(1-z)^{1/2}}{2} \rightarrow z.$$

\*\*\*) При выводе удобно временно предположить, что  $|\arg(1-z)| < \pi$ ,  $R(z) > 0$ . Распространение полученного результата на всю область  $|\arg(1 \pm z)| < \pi$  производится с помощью принципа аналитического продолжения.

Формула (9.6.11) играет важную роль в теории сферических функций. Например, равенство (7.6.9) является ее прямым следствием.

Не останавливаясь на других результатах, которые могут быть выведены путем аналогичных рассуждений, ограничимся тем, что приведем в заключение группу формул менее тривиального характера, именно:

$$F(\alpha, \beta, 2\beta, z) = \left[ \frac{1+(1-z)^{1/2}}{2} \right]^{-2\alpha} F \left\{ \alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \left[ \frac{1-(1-z)^{1/2}}{1+(1-z)^{1/2}} \right]^2 \right\}, \quad (9.6.12)$$

$$2\beta \neq -1, -3, -5, \dots, |\arg(1-z)| < \pi;$$

$$F\left(\alpha, \beta, 2\beta, \frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, z^2\right), \quad (9.6.13)$$

$$2\beta \neq -1, -3, -5, \dots, |z| < 1;$$

$$F(\alpha, \beta, 2\beta, z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-\alpha} F\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right\}, \quad (9.6.14)$$

$$2\beta \neq -1, -3, -5, \dots, |\arg(1-z)| < \pi.$$

Первая из этих формул доказывается так же, как равенство (9.6.1)\*, вторая получается из нее заменой  $\frac{1-(1-z)^{1/2}}{1+(1-z)^{1/2}} \rightarrow z$ . Вывод последней формулы более сложен.

Заметим предварительно, что из (9.6.9) после применения преобразования (9.5.1) и замены  $\beta \rightarrow \alpha - \beta + \frac{1}{2}$  следует

$$F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, z\right) = (1+z)^{-\alpha} F\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{4z}{(1+z)^2}\right\}, \quad (9.6.15)$$

$$2\beta \neq -1, -3, -5, \dots, |z| < 1.$$

\*) Доказательство основывается на том, что при замене переменных

$$z' = \left[ \frac{1-(1-z)^{1/2}}{1+(1-z)^{1/2}} \right]^2, \quad u = \left[ \frac{1+(1-z)^{1/2}}{2} \right]^{-2\alpha} v$$

уравнение (9.5.4) переходит в гипергеометрическое уравнение с новыми параметрами  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \alpha - \beta + \frac{1}{2}$ ,  $\gamma' = \beta + \frac{1}{2}$ .

Сравнивая (9.6.13) и (9.6.15), находим

$$F \left\{ \alpha, \beta, 2\beta, \frac{4z}{(1+z)^2} \right\} = \frac{(1+z)^{2\alpha}}{(1+z^2)^\alpha} F \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{4z^2}{(1+z^2)^2} \right\},$$

и требуемый результат получается с помощью подстановки  $\frac{4z}{(1+z)^2} \rightarrow z^*$ .

Функциональные соотношения, рассмотренные в данном параграфе, известны под названием квадратичных преобразований гипергеометрической функции. Теория квадратичных преобразований развита в работах Гаусса [1], [2], Куммера [1] и Гурса [1], а также с более общей точки зрения в исследованиях Римана [1], посвященных изучению одного класса дифференциальных уравнений, включающего гипергеометрическое уравнение в качестве частного случая. Развернутый лист квадратичных преобразований, содержащий большее число формул, чем указано в тексте данной книги, приведен в справочнике Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми [1].

### § 9.7. Формулы для аналитического продолжения гипергеометрической функции в особых случаях

Формулы, выведенные в § 9.5, позволяют получить аналитическое продолжение гипергеометрической функции в любую часть плоскости с разрезом  $(1, \infty)$ ; однако некоторые из них теряют смысл при определенных значениях параметров и должны быть заменены соответствующими формулами настоящего параграфа.

Общий метод вывода последующих формул состоит в выполнении надлежащего предельного перехода в исходных формулах § 9.5.

Пусть, например, требуется получить аналитическое продолжение функции  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в область  $|z-1| < 1$ ,  $|\arg(1-z)| < \pi$ . Если  $\alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , для этого можно воспользоваться равенством (9.5.7). При  $\gamma = \alpha + \beta \pm n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) последняя формула не применима.

Чтобы вывести формулу, позволяющую осуществить аналитическое продолжение в рассматриваемом случае, заменим гипергеометрические функции в правой части (9.5.7) соответствующими рядами и преобразуем полученное выражение с помощью соотношения (1.2.2).

\*) При этой подстановке

$$\frac{1+z^2}{(1+z)^2} \rightarrow \frac{2-z}{z}, \quad \frac{4z^2}{(1+z^2)^2} \rightarrow \left( \frac{z}{2-z} \right)^2.$$



Тогда находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi(\gamma - \alpha - \beta)} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{\Gamma(1 + \alpha + \beta - \gamma + k) k!} (1-z)^k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha)_k (\gamma - \beta)_k}{\Gamma(1 - \alpha - \beta + \gamma + k) k!} (1-z)^{k + \gamma - \alpha - \beta} \right\} = \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi(\gamma - \alpha - \beta)} (g_1 - g_2). \quad (9.7.1) \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow \alpha + \beta + n} g_1 = \lim_{\gamma \rightarrow \alpha + \beta + n} g_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)_k (\beta + n)_k}{(n + k)! k!},$$

поэтому правая часть (9.7.1) принимает неопределенный вид при  $\gamma = \alpha + \beta + n$ . Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta + n)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + n, z) &= \\ &= (-1)^n \left[ \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha + \beta + n} - \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha + \beta + n} \right]. \quad (9.7.2) \end{aligned}$$

После вычислений, аналогичных тем, которые были выполнены в § 5.5, находим \*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha + \beta + n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} (n-k-1)! (\alpha)_k (\beta)_k}{k!} (1-z)^k + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)_k (\beta + n)_k}{(n + k)! k!} [\psi(k+1) - \psi(\alpha + n) - \psi(\beta + n)] (1-z)^{k+n}, \quad (9.7.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \alpha + \beta + n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)_k (\beta + n)_k}{(n + k)! k!} [\psi(\alpha + n + k) - \psi(\alpha + n) + \\ &+ \psi(\beta + n + k) - \psi(\beta + n) - \psi(1 + n + k) + \ln(1-z)] (1-z)^{k+n}, \quad (9.7.4) \end{aligned}$$

где  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  — логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции.

\*) При дифференцировании используется формула

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda)_k = (\lambda)_k [\psi(\lambda + k) - \psi(\lambda)].$$

В дальнейшем предполагается  $\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots$

Подставляя найденные выражения в (9.7.2), получаем после простых преобразований

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + n, z) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n)}{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)! (\alpha)_k (\beta)_k}{k!} (1-z)^k + \\ + \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + \beta + n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)_k (\beta + n)_k}{(n+k)! k!} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1) - \\ - \psi(\alpha + n + k) - \psi(\beta + n + k) - \ln(1-z)] (1-z)^{n+k}, \\ n = 0, 1, 2, \dots; \alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots; |z-1| < 1; |\arg(1-z)| < \pi. \quad (9.7.5)$$

Пустая сумма  $\sum_{k=0}^{-1}$ , появляющаяся при  $n=0$ , принимается, как обычно, равной нулю.

Если  $\alpha$  или  $\beta$  равны  $0, -1, -2, \dots$ , формула (9.7.5) не может быть использована, однако для таких значений  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  приводится к полиному, и необходимость в аналитическом продолжении отпадает.

Случай  $\gamma = \alpha + \beta - n$  сводится к рассмотренному с помощью преобразования (9.5.3), которое дает

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n, z) = (1-z)^{-n} F(\alpha', \beta', \alpha' + \beta' + n, z), \quad (9.7.6)$$

где  $\alpha' = \alpha - n, \beta' = \beta - n$ .

Изложенный метод применим для аналогичных преобразований других формул § 9.5. Например, чтобы вывести формулу, пригодную для аналитического продолжения  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в область  $|z| > 1, |\arg(-z)| < \pi$  при  $\alpha - \beta = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), следует выполнить предельный переход  $\beta \rightarrow \alpha \pm n$  в (9.5.9). После вычислений, подобных проделанным выше, приходим к следующему выражению:

$$F(\alpha, \alpha + n, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) (-z)^{-\alpha}}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\alpha + n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (\alpha)_k (1-\gamma+\alpha)_k}{k!} (-z)^{-k} + \\ + \frac{\Gamma(\gamma) (-z)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha - n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)_k (1 + \alpha - \gamma + n)_k}{(n+k)! k!} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1) - \\ - \psi(\alpha + n + k) - \psi(\gamma - \alpha - n - k) + \ln(-z)] z^{-n-k}, \quad (9.7.7)$$

$n = 0, 1, 2, \dots; \alpha \neq 0, -1, -2, \dots; \gamma - \alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \gamma \neq 0, -1, -2, \dots; |z| > 1; |\arg(-z)| < \pi.$

Рассмотрим исключительные случаи, когда полученная формула не применима.

Если  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ , то  $F(\alpha, \alpha + n, \gamma, z)$  приводится к полиному и не нуждается в аналитическом продолжении.

На основании (9.5.3)

$$F(\alpha, \alpha + n, \gamma, z) = (1 - z)^{\gamma - 2\alpha - n} F(\gamma - \alpha, \gamma - \alpha - n, \gamma, z), \quad (9.7.8)$$

поэтому при  $\gamma - \alpha = 0, -1, -2, \dots$  или  $\gamma - \alpha = 1, 2, \dots$ ,  $n$  рассматриваемая функция сводится к алгебраической, и необходимость в аналитическом продолжении снова отпадает.

Если  $\gamma - \alpha = n + 1, n + 2, \dots$ ,  $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то гипергеометрическая функция в правой части (9.7.8) удовлетворяет условиям, позволяющим осуществить требуемое аналитическое продолжение по формуле (9.7.7).

Наконец, если  $\gamma - \alpha = n + 1, n + 2, \dots$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , гипергеометрическая функция может быть представлена интегралом типа (9.1.5) с рациональной подынтегральной функцией. Поэтому  $F(\alpha, \alpha + n, \gamma, z)$  выражается в конечном виде через элементарные функции.

Случай  $\alpha - \beta = n$  ( $n = -1, -2, \dots$ ) сводится к рассмотренному при помощи соотношения (9.5.3).

В заключение заметим, что особые случаи других формул § 9.5 и 9.6 могут быть исследованы аналогичным образом.

### § 9.8. Представления различных функций через гипергеометрическую функцию

1. Элементарные функции. Гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  приводится к полиному, когда  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  или  $\beta = 0, -1, -2, \dots$ . Например,

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = 1, \quad F(\alpha, -2, \gamma, z) = 1 - 2 \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} z^2$$

и т. д.

Преобразование

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z)$$

показывает, что гипергеометрическая функция при  $\gamma - \alpha = 0, -1, -2, \dots$  или  $\gamma - \beta = 0, -1, -2, \dots$  выражается через алгебраические функции. В частности,

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1 - z)^{-\alpha}, \quad |\arg(1 - z)| < \pi. \quad (9.8.1)$$

Придавая параметрам  $\alpha$  и  $\beta$  специальные значения, находим

$$\left. \begin{aligned} (1 - z)^{\nu} &= F(-\nu, 1, 1, z), \\ (1 - z)^{-\frac{1}{2}} &= F\left(\frac{1}{2}, 1, 1, z\right), \\ z^n &= F(-n, 1, 1, 1 - z), \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.8.2)$$

Другие представления этого типа могут быть выведены из формул § 9.6. Так, полагая  $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$  в (9.6.2) и (9.6.7), имеем

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha + 1, z\right) &= \left[\frac{1 + (1-z)^{1/2}}{2}\right]^{-2\alpha}, \\ F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha, z\right) &= (1-z)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1 + (1-z)^{1/2}}{2}\right]^{1-2\alpha}, \\ &|\arg(1-z)| < \pi. \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

Чтобы получить представление логарифмической функции, воспользуемся разложением

$$\ln(1-z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} = -z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k k!} z^k, \quad |z| < 1,$$

откуда следует

$$\ln(1-z) = -zF(1, 1, 2, z), \quad |\arg(1-z)| < \pi. \quad (9.8.4)$$

Аналогичным образом выводятся формулы для обратных круговых функций:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arctg} z &= zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\right), \quad |\arg(1 \pm zi)| < \pi; \\ \operatorname{arcsin} z &= zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad |\arg(1 \pm z)| < \pi \end{aligned} \right\} \quad (9.8.5)$$

и т. д.

2. Эллиптические интегралы. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$K(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi, \quad E(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

где  $z$  — комплексное переменное, принадлежащее области  $|\arg(1 \pm z)| < \pi$ , также могут быть представлены через функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ .

Предполагая временно  $|z| < 1$  и воспользовавшись биномиальным разложением, находим

$$K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} z^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{(1)_k k!} z^{2k},$$

откуда

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right), \quad |\arg(1 \pm z)| < \pi. \quad (9.8.6)$$

Для эллиптического интеграла второго рода таким же образом получается представление

$$E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right), \quad |\arg(1 \pm z)| < \pi. \quad (9.8.7)$$

Выведенные формулы могут быть положены в основу теории эллиптических интегралов, рассматриваемых как функции от модуля  $z$ .

3. Сферические функции. Один из наиболее важных классов функций, которые могут быть выражены через гипергеометрическую функцию, образуют сферические функции, изученные в гл. VII. Требуемые представления непосредственно получаются из формул (7.12.27) и (7.12.29). Мы имеем

$$P_{\nu}^m(z) = \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma(m + 1)} F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1, \frac{1 - z}{2}\right), \quad (9.8.8)$$

$$|\arg(z \pm 1)| < \pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$Q_{\nu}^m(z) = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + m + 1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) z^{\nu+m+1}} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times F\left(\frac{m + \nu + 2}{2}, \frac{m + \nu + 1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (9.8.9)$$

$$|\arg z| < \pi, \quad |\arg(z \pm 1)| < \pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, представление полиномов Лежандра (§ 4.2) дается формулой

$$P_n(z) = F\left(-n, n + 1, 1, \frac{1 - z}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.8.10)$$

Если принять формулы (9.8.8—10) за определение сферических функций, то теория последних может быть весьма просто развита, исходя из общей теории гипергеометрической функции, что особенно удобно при выводе соотношений § 7.6 и их обобщений на случай произвольного  $m$ .

Приведенные примеры указывают на важное значение гипергеометрической функции для различных разделов математического анализа.

## § 9.9. Вырожденная гипергеометрическая функция

Наряду с гипергеометрической функцией  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , важную роль в теории специальных функций играет так называемая вырожденная гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \gamma, z)$ .

Чтобы определить эту функцию, заметим, что степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!},$$

где  $z$  — комплексное переменное,  $\alpha$  и  $\gamma$  — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения, исключая  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ , и символ  $(\lambda)_k$  обозначает величину

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad (\lambda)_0 = 1,$$

сходится при любых конечных  $z^*$ .

Вырожденная гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \gamma, z)$  определяется как сумма рассматриваемого ряда

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < \infty. \quad (9.9.1)$$

Из данного определения вытекает, что  $F(\alpha, \gamma, z)$  есть целая функция комплексного переменного  $z$ .

Если положить

$$f(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma + k)} \frac{z^k}{k!}, \quad (9.9.2)$$

то  $f(\alpha, \gamma, z)$  при фиксированном  $z$  будет целой функцией от  $\alpha$  и  $\gamma$ . Действительно, члены ряда (9.9.2) являются целыми функциями этих переменных, и ряд сходится равномерно в области  $|\alpha| < A, |\gamma| < C^{**}$ . Отсюда следует, что при заданном  $z$  функция  $F(\alpha, \gamma, z)$  представляет целую функцию  $\alpha$  и мероморфную функцию  $\gamma$  с простыми полюсами в точках  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ .

Функция  $F(\alpha, \gamma, z)$  весьма часто встречается в анализе, причем главное ее значение состоит в том, что многие специальные функции могут рассматриваться как ее частные случаи, что в значительной мере облегчает построение теории этих функций и придает ей общий и компактный характер.

\*) Если обозначить через  $u_k = \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}$  общий член ряда, то

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\alpha + k}{(\gamma + k)(1 + k)} z \right| \rightarrow 0, \text{ когда } k \rightarrow \infty.$$

\*\*\*) Полагая  $v_k = \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma + k)} \frac{z^k}{k!}$ , имеем для достаточно больших  $k$

$$\left| \frac{v_{k+1}}{v_k} \right| = \left| \frac{\alpha + k}{(\gamma + k)(1 + k)} z \right| \leq \frac{A + k}{(k - C)(1 + k)} |z| \leq q < 1,$$

и равномерная сходимость следует из признака, указанного на стр. 132.

Связь функции  $F(\alpha, \gamma, z)$  с гипергеометрической функцией дается соотношением

$$F(\alpha, \gamma, z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right), \quad (9.9.3)$$

которое легко доказывается подстановкой ряда (9.1.1).

Из определения вырожденной гипергеометрической функции непосредственно вытекают равенства:

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (9.9.4)$$

$$\frac{d^m}{dz^m} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha + m, \gamma + m, z), \quad (9.9.5)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

и рекуррентные соотношения:

$$(\gamma - \alpha - 1)F + \alpha F(\alpha + 1) - (\gamma - 1)F(\gamma - 1) = 0, \quad (9.9.6)$$

$$\gamma F - \gamma F(\alpha - 1) - zF(\gamma + 1) = 0, \quad (9.9.7)$$

$$(\alpha - 1 + z)F + (\gamma - \alpha)F(\alpha - 1) - (\gamma - 1)F(\gamma - 1) = 0, \quad (9.9.8)$$

$$\gamma(\alpha + z)F - \alpha\gamma F(\alpha + 1) - (\gamma - \alpha)zF(\gamma + 1) = 0, \quad (9.9.9)$$

$$(\gamma - \alpha)F(\alpha - 1) + (2\alpha - \gamma + z)F - \alpha F(\alpha + 1) = 0, \quad (9.9.10)$$

$$\gamma(\gamma - 1)F(\gamma - 1) - \gamma(\gamma - 1 + z)F + (\gamma - \alpha)zF(\gamma + 1) = 0, \quad (9.9.11)$$

связывающие функцию  $F \equiv F(\alpha, \gamma, z)$  с двумя любыми смежными функциями  $F(\alpha \pm 1) \equiv F(\alpha \pm 1, \gamma, z)$  и  $F(\gamma \pm 1) \equiv F(\alpha, \gamma \pm 1, z)$ .

Формулы (9.9.6—7) доказываются путем подстановки ряда (9.9.1)\*, остальные рекуррентные соотношения получаются из них в результате простых алгебраических операций.

Повторное применение рекуррентных формул приводит к линейным соотношениям, связывающим функцию  $F(\alpha, \gamma, z)$  с родственными функциями  $F(\alpha + m, \gamma + n, z)$ , где  $m$  и  $n$  — заданные целые числа. Примерами подобных соотношений могут служить равенства:

$$F(\alpha, \gamma, z) = F(\alpha + 1, \gamma, z) - \frac{z}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (9.9.12)$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma} F(\alpha, \gamma + 1, z) + \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z) \quad (9.9.13)$$

и т. д.

---

\*) Ср. § 9.2.

### § 9.10. Дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции и его интегралы. Вырожденная гипергеометрическая функция второго рода

Покажем, что вырожденная гипергеометрическая функция является частным решением линейного дифференциального уравнения

$$z u'' + (\gamma - z) u' - \alpha u = 0, \quad (9.10.1)$$

где  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

Действительно, обозначая левую часть уравнения через  $l(u)$  и полагая  $u = u_1 = F(\alpha, \gamma, z)$ , имеем

$$\begin{aligned} l(u_1) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} z^{k-1} + (\gamma - z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} z^{k-1} - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} z^k = \\ &= \left[ \gamma \frac{(\alpha)_1}{(\gamma)_1} - \alpha \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} \left[ k \frac{\alpha + k}{\gamma + k} + \gamma \frac{\alpha + k}{\gamma + k} - k - \alpha \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить второе линейное независимое решение рассматриваемого уравнения, предположим, что  $|\arg z| < \pi$ , и выполним подстановку  $u = z^{1-\gamma} v$ .

Уравнение (9.10.1) преобразуется тогда в уравнение того же вида

$$z v'' + (\gamma' - z) v' - \alpha' v = 0$$

с новыми значениями параметров  $\alpha' = 1 + \alpha - \gamma$ ,  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Отсюда следует, что при  $\gamma \neq 2, 3, \dots$  функция

$$u = u_2 = z^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z)$$

также является решением уравнения (9.10.1).

Если  $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , оба решения  $(u_1, u_2)$  имеют смысл и линейно независимы между собой, поэтому общий интеграл уравнения (9.10.1) может быть представлен в виде\*)

$$\begin{aligned} u &= AF(\alpha, \gamma, z) + Bz^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z), \quad (9.10.2) \\ \gamma &\neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, |\arg z| < \pi. \end{aligned}$$

Чтобы получить выражение общего интеграла в форме, пригодной для любых значений  $\gamma$  (кроме  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ ), удобно ввести

\*) При  $\gamma = 1$   $u_1 \equiv u_2$ .



вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода\*)

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z), \quad (9.10.3) \\ \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, |\arg z| < \pi.$$

Формула (9.10.3) определяет функцию  $G(\alpha, \gamma, z)$  для любых  $\gamma$ , отличных от целого числа. Покажем, что при  $\gamma \rightarrow n+1$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) правая часть (9.10.3) стремится к определенному пределу.

Для доказательства заменим гипергеометрические функции соответствующими рядами и воспользуемся соотношением (1.2.2) теории  $\Gamma$ -функции. Тогда получим

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{z^k}{k!} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+1)_k}{\Gamma(2-\gamma+k)} \frac{z^{k+1-\gamma}}{k!} \right] = \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} (g_1 - g_2). \quad (9.10.4)$$

Мы имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow n+1} g_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(k+n+1)} \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(n+k)!} \frac{z^k}{k!}, \\ \lim_{\gamma \rightarrow n+1} g_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\alpha-n)_k}{\Gamma(k-n+1)} \frac{z^{k-n}}{k!} = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-n)_{k+n}}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{(n+k)!} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(n+k)!} \frac{z^k}{k!},$$

поэтому выражение в правой части (9.10.4) при  $\gamma \rightarrow n+1$  принимает неопределенный вид и стремится к пределу, значение которого может быть найдено по правилу Лопиталья.

В соответствии с этим результатом положим

$$G(\alpha, n+1, z) = \lim_{\gamma \rightarrow n+1} G(\alpha, \gamma, z) = \\ = (-1)^{n+1} \left[ \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=n+1} - \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=n+1} \right], \quad (9.10.5) \\ n = 0, 1, 2, \dots, |\arg z| < \pi.$$

\*) Данное определение принадлежит Трикоми. В последующих работах, в частности в справочнике Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми [1], эта функция обозначается  $\Psi(\alpha, \gamma, z)$ .

Выполнив вычисления, аналогичные тем, которые были проделаны в § 5.5, находим\*):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=n+1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(n+k)! k!} [\psi(\alpha-n) - \psi(n+k+1)], \\ \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=n+1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(n+k)! k!} [\psi(1+k) - \psi(\alpha+k) + \\ &+ \psi(\alpha-n) - \ln z] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} (n-k-1)! (\alpha-n)_k}{k!} z^{k-n}, \end{aligned}$$

откуда для  $G(\alpha, n+1, z)$  получается явное выражение в форме ряда

$$\begin{aligned} G(\alpha, n+1, z) &= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(n+k)! k!} [\psi(\alpha+k) - \psi(1+k) - \\ &- \psi(n+1+k) + \ln z] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)! (\alpha-n)_k}{k!} z^{k-n}, \\ &n=0, 1, 2, \dots; \alpha \neq 0, -1, -2, \dots; |\arg z| < \pi. \end{aligned} \quad (9.10.6)$$

Здесь  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  — логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции, и для случая  $n=0$  пустая сумма  $\sum_{k=0}^{-1}$  принимается равной нулю.

Если  $\alpha = -m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), то предельный переход  $\gamma \rightarrow n+1$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) в формуле (9.10.3) приводит к выражению

$$\begin{aligned} G(-m, n+1, z) &= (-1)^m \frac{(m+n)!}{n!} F(-m, n+1, z), \\ m &= 0, 1, 2, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.10.7)$$

Из (9.10.3) непосредственно следует, что вырожденная гипергеометрическая функция второго рода удовлетворяет функциональному соотношению

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad |\arg z| < \pi. \quad (9.10.8)$$

\*) При дифференцировании  $g_2$  полезно иметь в виду формулу

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda)_k = (\lambda)_k [\psi(\lambda+k) - \psi(\lambda)].$$

В дальнейшем предполагается  $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$

На основании этой формулы можно определить функцию  $G(\alpha, \gamma, z)$  при  $\gamma$ , равном нулю или целому отрицательному числу, при помощи равенства

$$G(\alpha, 1-n, z) = \lim_{\gamma \rightarrow 1-n} G(\alpha, \gamma, z) = z^n G(\alpha+n, n+1, z), \quad (9.10.9)$$

$$n = 1, 2, \dots, |\arg z| < \pi.$$

Таким образом, функция  $G(\alpha, \gamma, z)$  имеет смысл при любых значениях ее параметров. Из данного определения вытекает, что  $G(\alpha, \gamma, z)$  регулярная функция от  $z$  в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  и целая функция  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Покажем, что функция  $G(\alpha, \gamma, z)$  является решением дифференциального уравнения (9.10.1). При  $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  доказательство непосредственно следует из (9.10.3). Для целых  $\gamma$  требуемый результат может быть обоснован путем применения принципа аналитического продолжения. Если  $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ , интегралы  $F(\alpha, \gamma, z)$  и  $G(\alpha, \gamma, z)$  линейно независимы между собой, в чем легко убедиться, составив вронскиан этой пары решений\*):

$$W\{F(\alpha, \gamma, z), G(\alpha, \gamma, z)\} = -\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} z^{-\gamma} e^z, \quad (9.10.10)$$

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg z| < \pi.$$

Общий интеграл уравнения (9.10.1) в этом случае может быть представлен в форме

$$u = AF(\alpha, \gamma, z) + BG(\alpha, \gamma, z), \quad (9.10.11)$$

$$\alpha, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg z| < \pi.$$

Функция  $G(\alpha, \gamma, z)$  обладает рядом свойств, аналогичных свойствам функции  $F(\alpha, \gamma, z)$ . Так, например, имеют место формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dz} G(\alpha, \gamma, z) = -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z),$$

$$\frac{d^m}{dz^m} G(\alpha, \gamma, z) = (-1)^m (\alpha)_m G(\alpha+m, \gamma+m, z), \quad (9.10.12)$$

$$m = 1, 2, \dots;$$

---

\*) Из (9.10.1) следует  $W\{F, G\} = Cz^{-\gamma} e^z$ . Сравнивая обе части этого равенства при  $z \rightarrow 0$ , находим  $C = -\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$ .

рекуррентные соотношения:

$$G - \alpha G(\alpha + 1) - G(\gamma - 1) = 0, \quad (9.10.13)$$

$$(\gamma - \alpha)G + G(\alpha - 1) - zG(\gamma + 1) = 0, \quad (9.10.14)$$

$$(\alpha - 1 + z)G - G(\alpha - 1) + (\alpha - \gamma + 1)G(\gamma - 1) = 0, \quad (9.10.15)$$

$$(\alpha + z)G + \alpha(\gamma - \alpha - 1)G(\alpha + 1) - zG(\gamma + 1) = 0, \quad (9.10.16)$$

$$G(\alpha - 1) - (2\alpha - \gamma + z)G + \alpha(\alpha - \gamma + 1)G(\alpha + 1) = 0, \quad (9.10.17)$$

$$(\gamma - \alpha - 1)G(\gamma - 1) - (\gamma - 1 + z)G + zG(\gamma + 1) = 0, \quad (9.10.18)$$

$$G \equiv G(\alpha, \gamma, z), \quad G(\alpha \pm 1) \equiv G(\alpha \pm 1, \gamma, z), \quad G(\gamma \pm 1) \equiv G(\alpha, \gamma \pm 1, z)$$

и т. д.

Справедливость этих формул вытекает из определения функции  $G$  и соответствующих свойств функции  $F$ .

### § 9.11. Интегральные представления для вырожденных гипергеометрических функций

Функции  $F(\alpha, \gamma, z)$  и  $G(\alpha, \gamma, z)$  допускают простые интегральные представления, играющие важную роль в теории этих функций и их различных приложениях.

Мы ограничимся выводом основных формул этого типа, содержащих интегралы, взятые по вещественному промежутку. Более общие интегральные представления в виде контурных интегралов приводятся в соответствующих справочниках (см., например, Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], т. I, гл. VI).

Простейшее интегральное представление для функции  $F(\alpha, \gamma, z)$  может быть получено путем суммирования ряда (9.9.1) с помощью подстановки (9.1.2)

$$\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1+k} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, R(\gamma) > R(\alpha) > 0.$$

Мы находим \*)

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 t^{\alpha-1+k} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k}{k!}, \end{aligned}$$

\*) Законность перестановки порядка суммирования и интегрирования следует из легко доказываемой абсолютной сходимости.

или

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{zt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad (9.11.1)$$

$$R(\gamma) > R(\alpha) > 0.$$

Из интегрального представления (9.11.1) можно вывести одно важное функциональное соотношение, которому удовлетворяет функция  $F(\alpha, \gamma, z)$ . Чтобы получить это соотношение, предположим сначала, что условия применимости формулы (9.11.1) выполнены, и произведем в интеграле замену переменного, положив  $t = 1 - s$ . Равенство (9.11.1) принимает тогда вид

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^z \int_0^1 e^{-zs} s^{\gamma-\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} ds,$$

откуда, так как  $R(\gamma) > R(\gamma - \alpha)$ , следует

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (9.11.2)$$

Соотношение (9.11.2) доказано пока в предположении, что  $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$ , однако после деления на  $\Gamma(\gamma)$  обе части рассматриваемого равенства становятся целыми функциями от  $\alpha$  и  $\gamma$ , и, согласно принципу аналитического продолжения, полученное равенство сохраняет силу при произвольных значениях параметров, исключая  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

Чтобы получить интегральное представление для  $G(\alpha, \gamma, z)$ , докажем предварительно, что функция, определенная равенством

$$u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad R(\alpha) > 0, \quad R(z) > 0, \quad (9.11.3)$$

есть решение дифференциального уравнения (9.10.1).

Действительно, обозначая левую часть этого уравнения через  $l(u)$ , мы имеем\*)

$$\begin{aligned} l(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} [zt^2 - (\gamma-z)t - \alpha] dt = \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{-zt} t^\alpha (1+t)^{\gamma-\alpha}] dt = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-zt} t^\alpha (1+t)^{\gamma-\alpha} \Big|_{t=0}^\infty = 0. \end{aligned}$$

\*) При наложенных на  $\alpha$  и  $z$  ограничениях дифференцирование под знаком интеграла законно.

В соответствии с (9.10.11) рассматриваемый интеграл может быть представлен в форме

$$u = AF(\alpha, \gamma, z) + Bz^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z), \quad (9.11.4)$$

$$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; |\arg z| < \pi.$$

Предположим временно, что  $0 < R(\gamma) < 1$  и  $z > 0$ . Переходя в (9.11.4) к пределу при  $z \rightarrow +0$ , находим \*)

$$A = \lim_{z \rightarrow +0} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$$

на основании соотношений (1.5.3) и (1.5.6) теории  $\Gamma$ -функции.

Если продифференцировать (9.11.4) по  $z$ , умножить на  $z^\gamma$  и затем перейти к пределу  $z \rightarrow +0$ , то получим

$$B = \frac{1}{1-\gamma} \lim_{z \rightarrow +0} z^\gamma u' = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z \rightarrow +0} z^\gamma \int_0^{\infty} e^{-zt} t^\alpha (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt =$$

$$= \frac{1}{(\gamma-1)\Gamma(\alpha)} \lim_{z \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-s} s^\alpha (s+z)^{\gamma-\alpha-1} ds =$$

$$= \frac{1}{(\gamma-1)\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\gamma-1} ds = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z) \equiv G(\alpha, \gamma, z). \quad (9.11.5)$$

Обе стороны данного равенства являются целыми функциями параметра  $\gamma$  и регулярными функциями переменного  $z$  в полуплоскости  $R(z) > 0$  (§ 9.10). Поэтому временные ограничения, наложенные выше на  $\gamma$  и  $z$ , могут быть отброшены, и мы приходим к интегральному представлению

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad R(\alpha) > 0, R(z) > 0. \quad (9.11.6)$$

Некоторые другие интегральные представления для функций  $F(\alpha, \gamma, z)$  и  $G(\alpha, \gamma, z)$  приведены в конце главы (стр. 331 примеры 11—13).

\*) Переход к пределу под знаком интеграла может быть легко обоснован.

### § 9.12. Асимптотические представления вырожденных гипергеометрических функций для больших значений аргумента

Мы начнем с вывода асимптотического представления функции  $G(\alpha, \gamma, z)$ , которое имеет наиболее простую форму. Чтобы получить это представление, предположим, что  $R(\alpha) > 0$ ,  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$  ( $\delta$  — произвольное малое положительное число), и воспользуемся интегральным представлением (9.11.6).

Подставляя разложение, приведенное на стр. 154

$$(1+t)^{\gamma-\alpha-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (1+\alpha-\gamma)_k}{k!} t^k + \\ + \frac{(-1)^{n+1} (1+\alpha-\gamma)_n}{n!} t^{n+1} \int_0^1 (1-s)^n (1+st)^{\gamma-\alpha-n-2} ds,$$

и интегрируя почленно, находим \*)

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha)_k (1+\alpha-\gamma)_k}{k!} z^{-k} + r_n(z) \right],$$

где

$$r_n(z) = \frac{(-1)^{n+1} (1+\alpha-\gamma)_n z^\alpha}{n! \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{n+\alpha} dt \int_0^1 (1-s)^n (1+st)^{\gamma-\alpha-n-2} ds.$$

Оценка по модулю дает

$$|r_n| \leq \left| \frac{(1+\alpha-\gamma)_n}{n! \Gamma(\alpha)} z^\alpha \right| \int_0^\infty e^{-|z| \sin \delta \cdot t} t^{n+R(\alpha)} dt \int_0^1 (1-s)^n (1+st)^{R(\gamma-\alpha)-n-2} ds.$$

Пусть  $n$  выбрано настолько большим, что  $R(\gamma-\alpha) - n - 2 \leq 0$ . Тогда  $(1+st)^{R(\gamma-\alpha)-n-2} \leq 1$  и для  $r_n$  получается оценка \*\*)

$$|r_n(z)| \leq \left| \frac{(1+\alpha-\gamma)_n}{(n+1)! \Gamma(\alpha)} \right| \frac{\Gamma[n+R(\alpha)+1] |z|^{R(\alpha)} e^{|\alpha| \pi}}{(|z| \sin \delta)^{n+R(\alpha)+1}} = O(|z|^{-n-1}).$$

\*) На основании (1.5.1)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha+k-1} dt = (\alpha)_k z^{-\alpha-k}, \quad R(\alpha) > 0, R(z) > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

\*\*\*) При комплексных  $a$  и  $b$  имеем

$$|a^b| = |a|^{R(b)} e^{-I(b) \arg a} \leq |a|^{R(b)} e^{\pi |I(b)|}.$$

Таким образом, для больших  $|z|$

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha)_k (1 + \alpha - \gamma)_k}{k!} z^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right],$$

$$R(\alpha) > 0, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad n \geq R(\gamma - \alpha) - 2. \quad (9.12.1)$$

Покажем, что условия, при которых доказана формула (9.12.1), могут быть значительно смягчены.

Прежде всего заметим, что если даже  $R(\gamma - \alpha) - n - 2 > 0$ , то всегда можно выбрать такое  $m > n$ , что  $R(\gamma - \alpha) - m - 2 \leq 0$ , и представить  $G(\alpha, \gamma, z)$  с помощью формулы вида (9.12.1), где  $n$  заменено на  $m$ . Но

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \dots + O(|z|^{-m-1}) &= \sum_{k=0}^n \dots + \sum_{k=n+1}^m \dots + O(|z|^{-m-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \dots + O(|z|^{-n-1}), \end{aligned}$$

и мы снова приходим к представлению (9.12.1).

Таким образом, условие, наложенное на выбор  $n$ , может быть отброшено, и формула (9.12.1) остается справедливой при любых значениях  $n$ .

Освободимся теперь от ограничения, наложенного на параметр  $\alpha$ . Предположим, что  $\alpha$  удовлетворяет более слабому условию  $R(\alpha) > -1$ . Тогда  $R(\alpha + 1) > 0$ , и формула (9.12.1) может быть применена к каждой из гипергеометрических функций в правой части равенства \*)

$$G(\alpha, \gamma, z) = zG(\alpha + 1, \gamma + 1, z) + (1 + \alpha - \gamma)G(\alpha + 1, \gamma, z). \quad (9.12.2)$$

Проделав необходимые вычисления, мы снова придем к асимптотическому представлению (9.12.1), но уже при условии  $R(\alpha) > -1$ . Повторяя это рассуждение, мы докажем, что рассматриваемое равенство справедливо при любых конечных  $\alpha$ . Наконец, путем незначительного изменения метода доказательства формулы (9.12.1) можно расширить допустимую область изменения  $\arg z$  и заменить условие  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$  более слабым  $|\arg z| \leq \pi - \delta$  \*\*).

\*) Это равенство получается из (9.10.14) заменой  $\alpha$  на  $\alpha + 1$ .

\*\*\*) Следует воспользоваться интегральным представлением

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad R(\alpha) > 0,$$

где

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad -(\pi - \delta) \leq \arg z \leq -\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right);$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \frac{\pi}{2} - \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta.$$



Таким образом, окончательно асимптотическое представление функции  $G(\alpha, \gamma, z)$  для больших  $|z|$  имеет вид

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha)_k (1 + \alpha - \gamma)_k}{k!} z^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right],$$

$$|\arg z| \leq \pi - \delta. \quad (9.12.3)$$

Соответствующее асимптотическое представление для функции  $F(\alpha, \gamma, z)$  может быть выведено из (9.12.3) и соотношения

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i\pi(\alpha - \gamma)} e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \quad (9.12.4)$$

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg z| < \pi,$$

которое является обращением формулы (9.10.3). Знак  $\pm$  выбирается здесь в зависимости от того  $I(z) \geq 0$ , причем соответственно  $(-z) = ze^{\mp i\pi}$ .

Для доказательства этой формулы предположим, что  $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и воспользуемся (9.10.3). Мы имеем

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} F(\alpha, \gamma, z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z). \quad (9.12.5)$$

Если заменить в последнем равенстве  $\alpha$  на  $(\gamma - \alpha)$  и  $z$  на  $(-z) = ze^{\mp i\pi}$ , то на основании (9.11.2) находим

$$e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \alpha)} F(\alpha, \gamma, z) -$$

$$- \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} z^{1-\gamma} e^{\pm i\pi\alpha} F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z). \quad (9.12.6)$$

Исключив  $F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z)$  из (9.12.5)–(9.12.6), приходим после некоторых преобразований к формуле (9.12.4).

Справедливость полученного результата для целых положительных значений  $\gamma$  вытекает из принципа аналитического продолжения.

Подставляя в (9.12.4) асимптотические представления функций  $G$ , получим искомое асимптотическое представление функции  $F(\alpha, \gamma, z)$

для больших  $|z|$ :

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} z^{-\alpha} \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha)_k (1+\alpha-\gamma)_k}{k!} z^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right] + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z z^{-(\gamma-\alpha)}} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\alpha)_k}{k!} z^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \quad (9.12.7) \\ \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta.$$

Здесь знак  $\pm$  соответствует  $I(z) \geq 0$ .

Если  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ , первое слагаемое будет мало по сравнению со вторым, и асимптотическая формула принимает вид

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z z^{-(\gamma-\alpha)}} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\alpha)_k}{k!} z^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right], \quad (9.12.8) \\ \alpha, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

### § 9.13. Представления различных функций через вырожденные гипергеометрические функции

Как уже отмечалось, многие элементарные и специальные функции, встречающиеся в анализе, могут быть выражены через функцию  $F(\alpha, \gamma, z)$ . Мы имеем, например,

$$F(\alpha, \alpha, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad F(1, 2, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\ F(-2, 1, z) = 1 - 2z + \frac{1}{2} z^2 \text{ и т. д.}$$

В настоящем параграфе мы получим представления через вырожденные гипергеометрические функции специальных функций, изученных в гл. II—V.

1. Интеграл вероятности. Исходя из определения интеграла вероятности  $\Phi(z)$  в форме степенного ряда (2.1.2) и принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k},$$

имеем

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)} = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k} \frac{(-z^2)^k}{k!},$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2\right). \quad (9.13.1)$$

Другая полезная формула вытекает из равенства

$$1 - \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Если ввести новое переменное интегрирования, положив  $t = z(1+s)^{1/2}$ , и воспользоваться интегральным представлением (9.11.6), находим \*)

$$1 - \Phi(z) = \frac{ze^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2s} (1+s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} G\left(1, \frac{3}{2}, z^2\right),$$

или, на основании (9.10.8),

$$1 - \Phi(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \quad (9.13.2)$$

2. Функция  $F(z)$ . Функция  $F(z)$ , связанная с интегралом вероятности от мнимого аргумента (§ 2.3), также просто выражается через  $F(\alpha, \gamma, z)$ .

Действительно, замечая, что

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2k+1)}{2^k} = \left(\frac{3}{2}\right)_k, \quad k! = (1)_k,$$

получаем из (2.3.4)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{1 \cdot 3 \dots (2k+1)} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (-z^2)^k}{k! \left(\frac{3}{2}\right)_k},$$

откуда

$$F(z) = zF\left(1, \frac{3}{2}, -z^2\right). \quad (9.13.3)$$

\*) При выводе предполагаем  $z > 0$ , а затем распространяем полученную формулу на более широкую область с помощью принципа аналитического продолжения.

3. Интегралы Френеля. Из соотношений (2.4.6) и формулы (9.13.1) находим:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{z}{2} \left[ F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i\pi z^2}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{i\pi z^2}{2}\right) \right], \\ S(z) &= \frac{z}{2i} \left[ F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i\pi z^2}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{i\pi z^2}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9.13.4)$$

4. Интегральная показательная функция. Мы имеем по определению

$$\text{Ei}(-z) = - \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi,$$

откуда, если положить  $t = z(1+s)$  и воспользоваться интегральным представлением (9.11.6),

$$\text{Ei}(-z) = -e^{-z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zs}}{1+s} ds = -e^{-z} G(1, 1, z).$$

Таким образом,

$$\text{Ei}(z) = -e^z G(1, 1, -z), \quad |\arg(-z)| < \pi. \quad (9.13.5)$$

5. Интегральный синус и интегральный косинус. Воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \text{Ci}(z) &= \frac{1}{2} \text{Ei}\left(-ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2} \text{Ei}\left(-ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \\ \text{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i} \text{Ei}\left(-ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2i} \text{Ei}\left(-ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \\ &|\arg z| < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

и равенством (9.13.5), находим:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ci}(z) &= -\frac{1}{2} e^{-zi} G\left(1, 1, ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2} e^{zi} G\left(1, 1, ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \\ \text{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i} e^{-zi} G\left(1, 1, ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2i} e^{zi} G\left(1, 1, ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \\ &|\arg z| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13.6)$$

6. Интегральный логарифм. Представление интегрального логарифма через функцию  $G(\alpha, \gamma, z)$  получится непосредственно из формул (3.4.3) и (9.13.5). Мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{li}(z) &= -zG(1, 1, -\ln z), & (9.13.7) \\ |\arg z| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi. \end{aligned}$$

7. Полиномы Эрмита. Из (4.9.2) следует, что четный полином Эрмита может быть представлен в форме

$$\begin{aligned} H_{2n}(z) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n)!}{k!(2n-2k)!} (2z)^{2n-2k} = (-1)^n (2n)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2z)^{2k}}{(n-k)!(2k)!} = \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (2z)^{2k}}{(2k)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (z^2)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}, \end{aligned}$$

так как  $(2k)! = 2^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)_k$ . Таким образом,

$$H_{2n}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} F\left(-n, \frac{1}{2}, z^2\right). \quad (9.13.8)$$

Для нечетного полинома Эрмита получается аналогичная формула

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2zF\left(-n, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (9.13.9)$$

8. Полиномы Лагерра. Полиномы Лагерра также могут быть выражены через  $F(\alpha, \gamma, z)$ . Принимая во внимание, что

$$\frac{(-1)^k}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k}{n!},$$

находим из (4.17.2)

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k z^k}{(\alpha+1)_k k!},$$

откуда

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F(-n, \alpha+1, z). \quad (9.13.10)$$

9. Цилиндрические функции. Чтобы выразить функцию Бесселя через вырожденную гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \gamma, z)$ , предположим сначала, что  $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ , и воспользуемся интегральным представлением (5.10.3).

Вводя новое переменное интегрирования  $s = \frac{1}{2}(1+t)$ , получаем

$$J_\nu(z) = \frac{2^{2\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 e^{2izs} s^{\nu-\frac{1}{2}} (1-s)^{s-\frac{1}{2}} ds =$$

$$= \frac{2^{2\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu + 1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right),$$

или, если воспользоваться для упрощения формулой удвоения гамма-функции (1.2.3),

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-iz} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right), \quad |\arg z| < \pi. \quad (9.13.11)$$

С помощью принципа аналитического продолжения легко показать, что результат справедлив при любых  $\nu$ .

Аналогичные представления могут быть получены также для других цилиндрических функций. Так, например, на основании (5.6.4), (9.13.11) и (9.10.3), мы имеем

$$H_\nu^{(1)}(z) = -2i\pi^{-\frac{1}{2}} e^{i(z-\pi\nu)} (2z)^\nu G\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \quad (9.13.12)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi;$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = 2i\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-i(z-\pi\nu)} (2z)^\nu G\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ze^{\frac{i\pi}{2}}\right), \quad (9.13.13)$$

$$-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Соответствующие представления для модифицированных цилиндрических функций вытекают из формул § 5.7. Мы находим

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-z} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right), \quad |\arg z| < \pi; \quad (9.13.14)$$

$$K_\nu(z) = \pi^{1/2} (2z)^\nu e^{-z} G\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right), \quad |\arg z| < \pi. \quad (9.13.15)$$

10. Функции Уиттекера. Функции Уиттекера определяются при помощи формул (Уиттекер и Ватсон [1], гл. 16)

$$\begin{aligned} M_{k, \mu}(z) &= z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} F\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right), \\ W_{k, \mu}(z) &= z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} G\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right), \end{aligned} \quad (9.13.16)$$

$$|\arg z| < \pi.$$

Эти функции образуют класс функций, родственных вырожденным гипергеометрическим функциям, и часто встречаются в различных приложениях.

### § 9.14. Обобщенные гипергеометрические функции

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^p (\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^q (\gamma_s)_k} \frac{z^k}{k!},$$

где  $p$  и  $q$  — целые положительные числа ( $p = 0, 1, 2, \dots, q = 0, 1, 2, \dots$ ), удовлетворяющие условию  $p \leq q + 1$ ;  $z$  — комплексное переменное;  $\alpha_r, \gamma_s$  — произвольные параметры ( $\gamma_s \neq 0, -1, -2, \dots$ );  $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)}$  \*).

С помощью признака Даламбера легко убедиться, что радиус сходимости ряда равен  $\infty$  при  $p \leq q$  и 1 при  $p = q + 1$ .

Сумма ряда называется обобщенной гипергеометрической функцией и обозначается символом  ${}_pF_q(\alpha_r, \gamma_s; z)$  \*\*).

Таким образом,

$${}_pF_q(\alpha_r, \gamma_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^p (\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^q (\gamma_s)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (9.14.1)$$

\*) Пустое произведение  $\prod_{r=1}^0$ , появляющееся при  $p = 0$  или  $q = 0$ , принимается, как обычно, равным единице.

\*\*) Употребляется также обозначение

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \gamma_1, \dots, \gamma_q \end{matrix}; z\right).$$

Из данного определения следует, что  ${}_pF_q$  при  $p \leq q$  есть целая функция комплексного переменного  $z$ . Что касается функции  ${}_{q+1}F_q$ , то она регулярна в круге  $|z| < 1$ , и для ее определения за пределами этого круга требуется выполнить аналитическое продолжение в соответствующую область.

Простейшими функциями, принадлежащими к рассматриваемому классу, являются:

$${}_0F_0(\alpha_r, \gamma_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

$${}_1F_0(\alpha_r, \gamma_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k}{k!} z^k = (1-z)^{-\alpha_1},$$

$${}_0F_1(\alpha_r, \gamma_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\gamma_1)_k k!} = \Gamma(\gamma_1) z^{-\frac{\gamma_1-1}{2}} I_{\gamma_1-1}(2z^{1/2}),$$

$${}_1F_1(\alpha_r, \gamma_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k} \frac{z^k}{k!} = F(\alpha_1, \gamma_1, z),$$

$${}_2F_1(\alpha_r, \gamma_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k}{(\gamma_1)_k k!} = F(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, z).$$

Последние два примера показывают, что гипергеометрические функции, рассмотренные в настоящей главе, представляют собой частный случай функций, определяемых при помощи рядов вида (9.14.1).

Некоторые элементы теории гипергеометрических функций переносятся на обобщенные гипергеометрические функции. Так, например, можно показать, что функция  $u = {}_pF_q(\alpha_r, \gamma_s; z)$  представляет собой частное решение линейного дифференциального уравнения  $(q+1)$ -го порядка

$$\left\{ \delta \prod_{s=1}^q (\delta + \gamma_s - 1) - z \prod_{r=1}^p (\delta + \alpha_r) \right\} u = 0, \quad (9.14.2)$$

где  $\delta = z \frac{d}{dz}$ .

При  $p = q = 1$  уравнение (9.14.2) переходит в уравнение (9.10.1), при  $p = 2, q = 1$  совпадает с гипергеометрическим уравнением (9.2.16).

Известны различные функциональные соотношения, которым удовлетворяют функции  ${}_pF_q$ , интегральные представления и т. д.

Краткий обзор теории обобщенных гипергеометрических функций приведен в монографии Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Три-



коми [1], т. I, гл. IV—V, где имеется также перечень основных работ по данному вопросу. Новые результаты содержатся в работе Норлунда [1].

### § 9.15. Сведения о таблицах гипергеометрических функций

Составление полных таблиц функции  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , зависящей от четырех переменных, требует чрезмерно большого труда, поэтому в настоящее время табулирование произведено лишь для некоторых специальных значений ее параметров.

Из таблиц вырожденной гипергеометрической функции  $F(\alpha, \gamma, z)$  могут быть упомянуты следующие таблицы:

1. Вебб и Эйри (Webb H. A. and Airey J. K.), Phil. Mag., (6), **36**, 1918:

$$F(\alpha, \gamma, x), \alpha = -3(0,5)4; \quad \gamma = 1(1)7; \quad x = 1(1)6(2)10.$$

2. Слетер (Slater L. J.), Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, 1960:

$$F(\alpha, \gamma, x), \alpha = -1(0,1)1; \quad \gamma = 0,1(0,1)1, \quad x = 1(1)10 \quad 8 \text{ зн. ц.}$$

3. Растон и Ланг (Rushton S., Lang E. D.), Sankhya, **13**, 377—411, Calcutta, 1954:

$$F(\alpha, \gamma, x), \alpha = -0,5(0,5 \text{ или } 1)50; \quad \gamma = 0,5(0,5)3,5; 4,5 \\ x = 0,02(0,02)0,1(0,1)1(1)10(10)50 \quad 7 \text{ зн. ц.}$$

Сведения о других таблицах гипергеометрических и родственных им функций можно найти в справочниках А. В. Лебедева и Р. М. Федоровой [1], Н. М. Буруновой [1], Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

Необходимо отметить, что существующие таблицы далеко не обеспечивают практических потребностей, в связи с чем табулирование функций, принадлежащих к рассматриваемому классу, остается актуальной задачей, стоящей перед вычислительными центрами.

### Упражнения

1. Доказать, исходя из интегрального представления (9.1.5), что

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x + i0) - F(\alpha, \beta, \gamma, x - i0) = \\ = \frac{2\pi i \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(1 + \gamma - \alpha - \beta)} (x - 1)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - x), \\ \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, x > 1.$$

Указание. В процессе доказательства предположить  $R(\alpha) < 1$ ,  $R(\gamma) > R(\beta) > 0$ , а затем воспользоваться принципом непрерывности.

Приведенная формула объясняет необходимость разреза  $(1, \infty)$  в определении  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  при  $\alpha$  и  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$

2. Вывести формулы:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha F = \alpha z^{\alpha-1} F(\alpha+1); \quad \frac{d}{dz} z^{\gamma-1} F = (\gamma-1) z^{\gamma-2} F(\gamma-1).$$

(По поводу обозначений см. § 9.2, стр. 290.)

3. Доказать равенства:

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)},$$

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots;$$

$$F(\alpha, \beta, 1 + \alpha - \beta, -1) = 2^{-\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha - \beta) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \beta + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$1 + \alpha - \beta \neq 0, -1, -2, \dots$$

4. Показать, что гипергеометрические полиномы  $F(-n, \beta, \gamma, z)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots; \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ) могут быть определены как коэффициенты разложения производящей функции:

$$w(z, t) = (1-t)^{\beta-\gamma} (1-t+zt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{n!} F(-n, \beta, \gamma, z) t^n,$$

$$|t| < \min\{1, |z-1|^{-1}\}.$$

5. Получить интегральное представление

$$\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s) \Gamma(\beta+s) \Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)} (-z)^s ds,$$

$$R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(-z)| < \pi,$$

где  $-\min\{R(\alpha), R(\beta)\} < c < 0$ .

У к а з а н и е. Дополнить контур интегрирования вправо дугой круга радиуса  $R_n = n + \frac{1}{2}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) и воспользоваться теоремой о вычетах.

Ограничения, наложенные на параметры, могут быть устранены путем некоторой деформации пути интегрирования (см. Уиттекер и Ватсон [1]; т. 2).

6. С помощью почленного интегрирования установить справедливость следующих формул:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(c) \Gamma(\gamma-c)} \int_0^1 t^{c-1} (1-t)^{\gamma-c-1} F(\alpha, \beta, c, zt) dt,$$

$$R(\gamma) > R(c) > 0, |\arg(1-z)| < \pi;$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1, z) = \gamma \int_0^1 F(\alpha, \beta, \gamma, zt) t^{\gamma-1} dt,$$

$$R(\gamma) > 0, |\arg(1-z)| < \pi.$$

7. По аналогии с § 9.10 гипергеометрическая функция второго рода  $G(\alpha, \beta, \gamma, z)$  может быть определена при помощи равенства

$$G(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma, z), \\ \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, |\arg z| < \pi, |\arg(1-z)| < \pi.$$

Показать, что  $G(\alpha, \beta, \gamma, z)$  удовлетворяет функциональному соотношению

$$G(\alpha, \beta, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

8. Повторяя рассуждения § 9.10, показать, что  $G(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — целая функция от  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , и вывести формулу

$$G(\alpha, \beta, n+1, z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\beta-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(n+k)! k!} z^k \times \\ \times [\psi(\alpha+k) + \psi(\beta+k) - \psi(1+k) - \psi(n+1+k) + \ln z] + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)! (\alpha-n)_k (\beta-n)_k}{k!} z^{k-n}, \\ n = 0, 1, 2, \dots, |\arg z| < \pi, |z| < 1, \alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots$$

9. Доказать, что функции  $\{F(\alpha, \beta, \gamma, z), G(\alpha, \beta, \gamma, z)\}$  образуют систему интегралов гипергеометрического дифференциального уравнения (9.5.4) с вронскианом

$$W\{F(\alpha, \beta, \gamma, z), G(\alpha, \beta, \gamma, z)\} = -\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1}, \\ \gamma \neq 0, -1, -2, \dots; |\arg z| < \pi, |\arg(1-z)| < \pi.$$

Последний результат показывает, что при  $\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots$  оба решения линейно независимы между собой.

10. Вывести формулы дифференцирования и рекуррентные соотношения для функции  $G(\alpha, \beta, \gamma, z)$ .

У к а з а н и е. Воспользоваться соответствующими соотношениями для функции  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ .

11. Получить интегральное представление

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)} (-z)^s ds,$$

$$R(\alpha) > 0, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}, -R(\alpha) < c < 0.$$

У к а з а н и е. Применить теорию вычетов.

12. Получить интегральное представление

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^z z^{\frac{1-\gamma}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha} J_{\gamma-1}(2z^{1/2}t^{1/2}) dt.$$

$$R(\gamma-\alpha) > 0, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, |\arg z| < \pi.$$

Указание. Разложить функцию Бесселя в степенной ряд и проинтегрировать почленно.

13. Получить интегральное представление

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{2z^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-\frac{1+\gamma}{2}} K_{\gamma-1}(2z^{1/2}t^{1/2}) dt,$$

$$R(\alpha) > 0, \quad R(\alpha-\gamma) > -1, \quad |\arg z| < \pi.$$

$K_{\nu}(z)$  — функция Макдональда.

14. Доказать формулы:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(c)\Gamma(\gamma-c)} \int_0^1 t^{c-1} (1-t)^{\gamma-c-1} F(\alpha, c, zt) dt,$$

$$R(\gamma) > R(c) > 0;$$

$$F(\alpha, \gamma+1, z) = \gamma \int_0^1 F(\alpha, \gamma, zt) t^{\gamma-1} dt, \quad R(\gamma) > 0.$$

15. Показать, что преобразование Лапласа от  $F(\alpha, \gamma, x)$

$$\overline{F(\alpha, \gamma, x)} = \frac{1}{p} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{p}\right).$$

16. Проверить, что функции Уиттекера  $\{M_{k, \mu}(z), W_{k, \mu}(z)\}$  образуют систему интегралов дифференциального уравнения

$$u'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) u = 0$$

с вронскианом

$$W\{M_{k, \mu}(z), W_{k, \mu}(z)\} = -\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)}, \quad 2\mu+1 \neq 0, -1, -2, \dots$$

Указание. Воспользоваться определением этих функций, данным в § 9.13.

17. Получить интегральное представление

$$W_{k, \mu}(z) = \frac{z^k e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mu-k-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{\mu+k-\frac{1}{2}} dt,$$

$$R\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right) > 0, \quad |\arg z| < \pi$$

(Уиттекер и Ватсон [1], гл. 16).

18. Воспользовавшись результатом примера 17, вывести асимптотическую формулу

$$W_{k, \mu}(z) \approx e^{-\frac{z}{2}} z^k, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta.$$

19. На основании результатов § 9.13 получить следующие представления различных специальных функций через  $W_{k, \mu}(z)$ :

$$1 - \Phi(z) = (\pi z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(z^2), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2};$$

$$E_1(z) = -(-z)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(-z), \quad |\arg(-z)| < \pi;$$

$$H(z) = -(-\ln z)^{-\frac{1}{2}} z^{1/2} W_{-\frac{1}{2}, 0}(-\ln z), \quad |\arg z| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi;$$

$$K_\nu(z) = \pi^{1/2} (2z)^{-1/2} W_{0, \nu}(2z), \quad |\arg z| < \pi.$$

20. Доказать равенство

$$\frac{d}{dz} {}_pF_q(\alpha_r, \gamma_s; z) = \frac{\prod_{r=1}^p \alpha_r}{\prod_{s=1}^q \gamma_s} {}_pF_q(\alpha_r + 1, \gamma_s + 1; z).$$

21. Доказать равенство

$${}_{p+1}F_{q+1}(\alpha_r, \gamma_s; z) = \frac{\Gamma(\gamma_{q+1})}{\Gamma(\alpha_{p+1}) \Gamma(\gamma_{q+1} - \alpha_{p+1})} \int_0^1 t^{\alpha_{p+1}-1} (1-t)^{\gamma_{q+1}-\alpha_{p+1}-1} {}_pF_q(\alpha_r, \gamma_s; zt) dt.$$

$$R(\gamma_{q+1}) > R(\alpha_{p+1}) > 0, \quad \text{при } p = q + 1 \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

22. Вывести формулу

$$\left[ F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right) \right]^2 = {}_3F_2\left(\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta; z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}, 2\alpha + 2\beta \end{matrix}\right).$$

У к а з а н и е. Составить линейное дифференциальное уравнение третьего порядка для квадрата функции  $F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}; z\right)$  (Уиттекер и Ватсон [1],

гл. 14) и показать, что функция  ${}_3F_2\left(\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta; z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}, 2\alpha + 2\beta \end{matrix}\right)$  является его решением, регулярным в окрестности точки  $z = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IX

Гаусс [1], [2]; Куммер [1]; Риман [1]; Клейн [1]; Уиттекер и Ватсон [1]; Барнс [1], [2]; Сноу [1]; Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер и Трикоми [1], [2]; Бухгольц [1]; Трикоми [1], [2]; Бейли [1]; Нордунд [1].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

## ГЛАВА X

### ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

#### § 10.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах

Краевые задачи математической физики, относящиеся к области, ограниченной поверхностью бесконечного параболического цилиндра, могут быть решены при помощи метода разделения переменных, если ввести систему параболических координат, для которых поверхность цилиндра является одной из координатных поверхностей.

Пусть  $(x, y, z)$  будет система прямоугольных координат, ось  $Z$  которой параллельна образующей цилиндра, ось  $X$  совпадает с осью симметрии параболы, получающейся при пересечении цилиндра какой-либо плоскостью, перпендикулярной оси  $Z$ , и начало координат помещено в фокусе этой параболы. Система пространственных параболических координат  $(\alpha, \beta, z)$  определяется в таком случае при помощи соотношений:

$$x = \frac{c}{2}(a^2 - \beta^2), \quad y = c\alpha\beta, \quad z = z, \quad (10.1.1)$$

где  $c$  — размерный множитель,  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $0 \leq \beta < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Координатные поверхности в данной системе координат суть параболические цилиндры  $\alpha = \text{const}$ :

$$y^2 = -2c\alpha^2 \left( x - \frac{c\alpha^2}{2} \right), \quad (10.1.2)$$

параболические цилиндры  $\beta = \text{const}$ , ортогональные к первым:

$$y^2 = 2c\beta^2 \left( x + \frac{c\beta^2}{2} \right), \quad (10.1.3)$$

и плоскости  $z = \text{const}$  (рис. 33). В частности, если выбрать величины  $c$  и  $\beta_0$  таким образом, чтобы произведение  $c\beta_0^2$  равнялось заданной величине  $p$ , то уравнение параболического цилиндра

$$y^2 = 2p \left( x + \frac{p}{2} \right) \quad (10.1.4)$$

в новых переменных принимает вид  $\beta = \beta_0$ , причем области, лежащей внутри цилиндра, будет соответствовать совокупность значений  $0 \leq \beta < \beta_0$ , области вне цилиндра — совокупность значений  $\beta_0 < \beta < \infty$ .

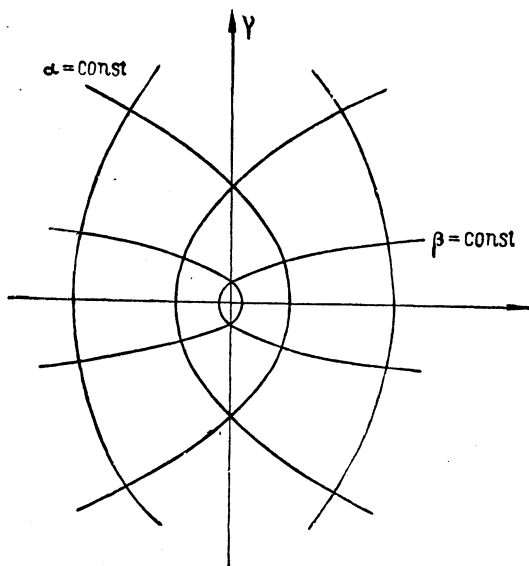


Рис. 33.

Выражение для квадрата линейного элемента в рассматриваемой системе криволинейных координат имеет форму

$$ds^2 = c^2 (\alpha^2 + \beta^2) (d\alpha^2 + d\beta^2) + dz^2, \quad (10.1.5)$$

поэтому значения коэффициентов Ламе будут  $H_\alpha = H_\beta = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $H_z = 1$ , и уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$  приводится к виду

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} = 0. \quad (10.1.6)$$

Если искать частные решения этого уравнения в форме

$$u = A(\alpha) B(\beta) Z(z), \quad (10.1.7)$$

то переменные разделяются, и мы получаем

$$\frac{1}{c^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left[ \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} \right] = -\frac{Z''}{Z} = \lambda^2,$$

где  $\lambda$  — произвольная постоянная, откуда следует

$$\left. \begin{aligned} Z'' + \lambda^2 Z &= 0, \\ \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} - \lambda^2 c^2 (\alpha^2 + \beta^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.1.8)$$

Последнее, в свою очередь, возможно лишь в том случае, если

$$A'' + (\mu - \lambda^2 c^2 \alpha^2) A = 0, \quad (10.1.9)$$

$$B'' - (\mu + \lambda^2 c^2 \beta^2) B = 0, \quad (10.1.10)$$

где  $\mu$  снова обозначает некоторую постоянную. Таким образом, уравнение Лапласа допускает бесконечное множество решений вида (10.1.7), зависящих от двух произвольных параметров  $\lambda$  и  $\mu$ .

В большинстве задач физического характера параметр  $\lambda$  есть вещественное положительное число (§ 10.9); поэтому, вводя вместо  $(\alpha, \beta)$  новые вещественные переменные  $(\xi, \eta)$ :  $\xi = \alpha \sqrt{\lambda c}$ ,  $\eta = \beta \sqrt{\lambda c}$  ( $-\infty < \xi < \infty$ ,  $0 \leq \eta < \infty$ ) и параметр  $\nu$ , связанный с  $\mu$  соотношением  $\mu = \lambda c (2\nu + 1)$ , мы приведем уравнения (10.1.9—10) к виду:

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + (2\nu + 1 - \xi^2) A = 0, \quad (10.1.11)$$

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} - (2\nu + 1 + \eta^2) B = 0. \quad (10.1.12)$$

## § 10.2. Функции Эрмита первого рода

Исследование уравнений (10.1.11—12), полученных при разделении переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах, сводится к изучению дифференциального уравнения

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2) u = 0 \quad (10.2.1)$$

при произвольных вещественных или комплексных  $z$  и  $\nu$ . Если ввести новую неизвестную функцию  $v$ , положив

$$u = e^{-\frac{z^2}{2}} v, \quad (10.2.2)$$

то рассматриваемое уравнение переходит в уравнение

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0, \quad (10.2.3)$$

которое при целом положительном  $\nu = n (n = 0, 1, 2, \dots)$  совпадает с дифференциальным уравнением (4.10.4) для полиномов Эрмита



$H_n(z)$ , исследованных в гл. IV. Решения уравнения (10.2.3), при произвольном значении параметра  $\nu$ , носят название функций Эрмита, а соответствующие им решения уравнения (10.2.1) называются функциями параболического цилиндра\*).

Функции Эрмита могут быть выражены через вырожденную гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \gamma, z)$ . Действительно, принимая за новое независимое переменное  $t = z^2$ , мы преобразуем уравнение (10.2.3) в уравнение

$$t \frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - t\right) \frac{dv}{dt} + \frac{\nu}{2} v = 0, \quad (10.2.4)$$

которое есть частный случай уравнения (9.10.1), соответствующий значениям  $\alpha = -\frac{\nu}{2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Согласно (9.10.2), общий интеграл дифференциального уравнения (10.2.4) будет

$$v = AF\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, t\right) + Bt^{1/2}F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, t\right), \quad (10.2.5)$$

откуда непосредственно получается общее выражение для рассматриваемых функций:

$$v = AF\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + BzF\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (10.2.6)$$

В частности, если выбрать значения постоянных равными

$$A = \frac{2^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad B = \frac{2^{\nu}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (10.2.7)$$

---

\*) Данное здесь определение несколько расходится с принятым в литературе, где под функциями параболического цилиндра понимают решения уравнения

$$u'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)u = 0,$$

которое приводится к виду (10.2.1) с помощью подстановки  $z = \sqrt{2}t$ . Одним из решений рассматриваемого уравнения является функция  $D_{\nu}(z)$ , связанная с функцией Эрмита  $H_{\nu}(z)$  (10.2.8) соотношением

$$D_{\nu}(z) = 2^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_{\nu}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

мы приходим к решению

$$v = H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} z F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad (10.2.8)$$

которое называется функцией Эрмита первого рода\*).

Из данного определения и известных свойств гамма-функции и вырожденной гипергеометрической функции следует, что  $H_\nu(z)$  есть целая функция комплексного переменного  $z$  и параметра  $\nu$ .

Если  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то одно из слагаемых в (10.2.8) обращается в нуль, а другое — в полином относительно  $z$ . Воспользовавшись формулами (1.2.1—3) теории гамма-функции, получаем после простых преобразований:

$$\left. \begin{aligned} H_{2m}(z) &= (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} F\left(-m, \frac{1}{2}, z^2\right), \\ H_{2m+1}(z) &= (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2z F\left(-m, \frac{3}{2}, z^2\right), \end{aligned} \right\} \quad (10.2.9)$$

откуда следует (9.13, 8—9), что при  $\nu = n$  функция Эрмита  $H_\nu(z)$  совпадает с полиномом Эрмита  $n$ -го порядка.

При  $\nu$ , отличном от нуля и целого положительного числа, общий интеграл уравнения (10.2.3) может быть выражен через функции Эрмита первого рода. В самом деле, так как уравнение (10.2.3) не меняет своего вида, если заменить в нем  $z$  на  $(-z)$ , то функция  $v_2 = H_\nu(-z)$ , наряду с функцией  $v_1 = H_\nu(z)$ , есть решение рассматриваемого уравнения. Обычным способом легко показать, что вронскиан пары решений  $\{v_1, v_2\}$  уравнения (10.2.3) имеет вид

$$W\{v_1, v_2\} = C e^{z^2},$$

где  $C$  — некоторая постоянная. Полагая  $z = 0$  и принимая во внимание формулы:

$$H_\nu(0) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad H'_\nu(0) = \frac{2^\nu \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (10.2.10)$$

\*) Заметим, что на основании (9.10.3) функция Эрмита просто связана с вырожденной гипергеометрической функцией второго рода, а именно

$$H_\nu(z) = 2^\nu G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right).$$

непосредственно следующие из определения функции Эрмита, получаем

$$C = W \{v_1, v_2\}_{z=0} = - \frac{2^{2\nu+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} = \frac{2^{\nu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma(-\nu)},$$

причем для упрощения использованы функциональные соотношения (1.2.2—3) теории гамма-функции. Таким образом,

$$W \{H_\nu(z), H_\nu(-z)\} = \frac{2^{\nu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2}, \quad (10.2.11)$$

откуда следует, что при  $\nu \neq 0, 1, 2, \dots$  рассматриваемые решения линейно независимы между собой и общий интеграл уравнения (10.2.3) может быть представлен в форме

$$v = MH_\nu(z) + NH_\nu(-z). \quad (10.2.12)$$

При  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $W \equiv 0$ , и найденные решения связаны линейной зависимостью

$$H_n(-z) = (-1)^n H_n(z), \quad (10.2.13)$$

поэтому правая часть (10.2.12) не является общим интегралом рассматриваемого уравнения.

Чтобы получить выражение общего интеграла, пригодное при любых значениях параметра  $\nu$ , заметим, что в результате подстановки

$$v = e^{z^2} w, \quad \zeta = iz$$

уравнение (10.2.3) преобразуется в уравнение

$$w'' - 2\zeta w' - 2(\nu + 1)w = 0, \quad (10.2.14)$$

отличающееся от (10.2.3) лишь заменой  $\nu$  на  $-\nu - 1$ . Отсюда следует, что функции

$$v_3 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz), \quad v_4 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz) \quad (10.2.15)$$

также являются интегралами уравнения (10.2.3).

Вычислив значения вронскианов

$$\begin{aligned} W \{H_\nu(z), e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz)\} &= e^{z^2 - \frac{\nu+1}{2} \pi i}, \\ W \{H_\nu(z), e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz)\} &= e^{z^2 + \frac{\nu+1}{2} \pi i}. \end{aligned} \quad (10.2.16)$$

находим, что каждое из решений (10.2.15) линейно независимо с  $H_\nu(z)$ , и общий интеграл уравнения (10.2.3) при произвольном  $\nu$  может быть представлен в одной из двух эквивалентных форм:

$$v = MH_\nu(z) + Ne^{z^2}H_{-\nu-1}(iz) = PH_\nu(z) + Qe^{z^2}H_{-\nu-1}(-iz). \quad (10.2.17)$$

Таким образом, независимо от значения  $\nu$  произвольное решение уравнения (10.2.3) допускает представление через функции Эрмита первого рода, в связи с чем достаточно ограничиться исследованием этого класса функций \*).

Из (10.2.17) следует, что общее выражение функций параболического цилиндра будет

$$\begin{aligned} u = u_\nu(z) &= Me^{-\frac{z^2}{2}}H_\nu(z) + Ne^{\frac{z^2}{2}}H_{-\nu-1}(iz) = \\ &= Pe^{-\frac{z^2}{2}}H_\nu(z) + Qe^{\frac{z^2}{2}}H_{-\nu-1}(-iz). \end{aligned} \quad (10.2.18)$$

### § 10.3. Функциональные соотношения для функций Эрмита

В соответствии с результатами § 10.2 каждое из выражений:

$$\begin{aligned} v_1 &= H_\nu(z), & v_3 &= e^{z^2}H_{-\nu-1}(iz), \\ v_2 &= H_\nu(-z), & v_4 &= e^{z^2}H_{-\nu-1}(-iz) \end{aligned}$$

представляет собой интеграл уравнения (10.2.3).

Так как три интеграла дифференциального уравнения второго порядка не могут быть линейно независимыми, любая из функций  $v_i$  допускает представление в виде линейной комбинации двух других независимых решений. В частности, при  $\nu \neq -1, -2, \dots$  должна иметь место формула \*\*)

$$H_\nu(z) = Me^{z^2}H_{-\nu-1}(iz) + Ne^{z^2}H_{-\nu-1}(-iz). \quad (10.3.1)$$

\*) Определение функций Эрмита второго рода с произвольным индексом  $\nu$  дано в работе Риекстыньша [1]. По мнению автора, целесообразно видоизменить это определение таким образом, чтобы функции первого и второго рода удовлетворяли одинаковым рекуррентным соотношениям (§ 10.4). Последнее условие выполняется, если определить функцию Эрмита второго рода  $G_\nu(z)$  при помощи равенства

$$G_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \left[ e^{\frac{z^2 + \nu + 1}{2} \pi i} H_{-\nu-1}(iz) + e^{\frac{z^2 - \nu + 1}{2} \pi i} H_{-\nu-1}(-iz) \right], \\ \nu \neq -1, -2, \dots$$

Для целых положительных значений  $\nu = n$  данное определение эквивалентно определению, принятому для  $G_n(z)$  в первом издании настоящей книги.

$$**) \quad W \{ e^{z^2}H_{-\nu-1}(iz), e^{z^2}H_{-\nu-1}(-iz) \} = \frac{i\sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} e^{z^2} \neq 0,$$

если  $\nu \neq -1, -2, \dots$

Постоянные  $M$  и  $N$  могут быть определены из условий (10.2.10), которые приводят к системе уравнений:

$$M + N = \frac{2^{2\nu+1}\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad M - N = \frac{2^{2\nu+1}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{i\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Если преобразовать правые части этих уравнений с помощью формулы \*)

$$2^{2z-1} \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(2z)}{\sqrt{\pi}} \sin \pi z, \quad (10.3.2)$$

то получим

$$M + N = \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi\nu}{2}, \quad M - N = \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} i \sin \frac{\pi\nu}{2}. \quad (10.3.3)$$

Решая последнюю систему и подставляя найденные значения  $M$  и  $N$  в (10.3.1), приходим к функциональному соотношению

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left[ e^{\frac{\pi\nu i}{2}} H_{-\nu-1}(iz) + e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} H_{-\nu-1}(-iz) \right]. \quad (10.3.4)$$

Формула (10.3.4) сохраняет смысл и для целых отрицательных  $\nu$ , если в этом случае под значением правой части понимать ее предел при  $\nu \rightarrow -n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Заменяя в (10.3.4)  $z$  на  $-z$ , получаем

$$H_\nu(-z) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left[ e^{\frac{\pi\nu i}{2}} H_{-\nu-1}(-iz) + e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} H_{-\nu-1}(iz) \right]. \quad (10.3.5)$$

Остальные функциональные соотношения рассматриваемого типа могут быть выведены из (10.3.4—5) путем чисто алгебраических операций. Например, мы имеем

$$H_\nu(z) = e^{\pi\nu i} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2 + \frac{\nu+1}{2}\pi i} H_{-\nu-1}(-iz), \quad (10.3.6)$$

$$H_\nu(z) = e^{-\pi\nu i} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2 - \frac{\nu+1}{2}\pi i} H_{-\nu-1}(iz) \quad (10.3.7)$$

и т. д.

\*) Эта формула является простым следствием соотношений (1.2.2—3).

## § 10.4. Рекуррентные соотношения для функций Эрмита

Функции Эрмита  $H_\nu(z)$  удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, представляющим собой обобщение на случай произвольного значения индекса  $\nu$  соответствующих формул § 4.10 для полиномов Эрмита.

Чтобы вывести рассматриваемые рекуррентные соотношения, выполним предварительно одно преобразование формулы (10.2.8), что приведет к новому представлению для функции  $H_\nu(z)$  в виде степенного ряда с простыми коэффициентами.

Подставляя в (10.2.8) развернутые выражения гипергеометрических рядов (9.9.1) и воспользовавшись соотношениями

$$\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) = 2^{\nu+1}\pi^{1/2}\Gamma(-\nu),$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = -\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \pi,$$

вытекающими из (1.2.2—3), имеем

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k-\frac{\nu}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} z^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1-\nu}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} z^{2k+1} \right] = \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)} z^{2k} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} z^{2k+1} \right] = \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{m-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} z^m. \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

Так как на основании (1.2.3)

$$2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \pi^{1/2} \Gamma(m+1) = \pi^{1/2} m!,$$

формула (10.4.1) упрощается и принимает вид

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{m-\nu}{2}\right)}{m!} (2z)^m, \quad |z| < \infty. \quad (10.4.2)$$

Найденная формула (10.4.2), представляющая самостоятельный интерес, позволяет весьма просто вывести требуемые рекуррентные соотношения.

Дифференцируя ряд (10.4.2) и вводя новый индекс суммирования  $n = m - 1$ , находим

$$\begin{aligned} H'_\nu(z) &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \Gamma\left(\frac{m-\nu}{2}\right) (2z)^{m-1}}{(m-1)!} = \\ &= -\frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n \Gamma\left(\frac{n+1-\nu}{2}\right)}{n!} (2z)^n = \\ &= -\frac{2\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} H_{\nu-1}(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z). \end{aligned}$$

Таким образом, функция Эрмита удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z), \quad (10.4.3)$$

представляющему собой обобщение формулы (4.10.2).

Дифференцируя (10.4.3) и исключая в полученном равенстве производные функций Эрмита с помощью (10.4.3) и дифференциального уравнения (10.2.3)

$$H''_\nu(z) - 2zH'_\nu(z) + 2\nu H_\nu(z) = 0, \quad (10.4.4)$$

получим

$$H_\nu(z) - 2zH_{\nu-1}(z) + 2(\nu-1)H_{\nu-2}(z) = 0,$$

откуда, если заменить  $\nu$  на  $(\nu+1)$ , следует второе рекуррентное соотношение

$$H_{\nu+1}(z) - 2zH_\nu(z) + 2\nu H_{\nu-1}(z) = 0, \quad (10.4.5)$$

которое для целого положительного  $\nu$  совпадает с ранее найденной формулой (4.10.1).

## § 10.5. Интегральные представления для функций Эрмита

Различные представления функций Эрмита с помощью определенных или контурных интегралов могут быть получены суммированием рядов, служащих для определения этих функций.

В частности, простейшее интегральное представление для  $H_\nu(z)$  получается из (10.4.2), если предположить  $R(\nu) < 0$  и заменить

гамма-функцию в этом разложении интегралом типа (1.1.1). Мы имеем тогда

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2z)^m}{m!} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\frac{m-\nu}{2}-1} ds = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-\frac{\nu}{2}-1} ds \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2zs^{1/2})^m}{m!} = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-s-2zs^{1/2}} s^{-\frac{\nu}{2}-1} ds, \end{aligned}$$

причем законность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из легко доказываемой абсолютной сходимости.

Вводя новое переменное интегрирования  $t = s^{1/2}$ , мы можем записать найденный результат в виде

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t^2-2tz} t^{-\nu-1} dt, \quad R(\nu) < 0. \quad (10.5.1)$$

Полученная формула близка по типу к интегральным представлениям § 4.11, найденным ранее для полиномов Эрмита. Из (10.5.1), в частности, вытекает, что функции Эрмита с целым отрицательным значком выражаются в замкнутой форме через интеграл вероятности  $\Phi(z)$  (§ 2.1). Действительно, полагая в (10.5.1)  $\nu = -1$ , мы находим

$$H_{-1}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2-2tz} dt = e^{z^2} \int_0^{\infty} e^{-(t+z)^2} dt = e^{z^2} \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds,$$

откуда

$$H_{-1}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{z^2} [1 - \Phi(z)] \quad (10.5.2)$$

и вообще

$$\begin{aligned} H_{-n-1}(z) &= \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^{n+1} n!} \frac{d^n}{dz^n} \{e^{z^2} [1 - \Phi(z)]\}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

Другое важное интегральное представление для  $H_\nu(z)$  может быть выведено из функционального соотношения (10.3.4), если заменить функции Эрмита в правой части этого равенства интегралами вида (10.5.1). Мы получим тогда, в предположении  $R(\nu) > -1$ , что

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu e^{z^2}}{\sqrt{\pi}} \left[ e^{\frac{\pi\nu i}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2-2izt} t^\nu dt + e^{-\frac{\pi\nu i}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2+2izt} t^\nu dt \right],$$



или

$$H_\nu(z) = \frac{2^{\nu+1} e^{z^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^\nu \cos\left(2zt - \frac{\pi\nu}{2}\right) dt, \quad R(\nu) > -1. \quad (10.5.4)$$

Формула (10.5.4) является обобщением интегральных представлений для полиномов Эрмита (4.11.2—3) и переходит в них при  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Некоторые другие интегральные представления для функций Эрмита приведены в разделе упражнений к настоящей главе (примеры 1—4).

### § 10.6. Асимптотические представления функций Эрмита для больших значений аргумента

Чтобы получить асимптотические формулы, пригодные для представления функций Эрмита  $H_\nu(z)$  при больших  $|z|$  и ограниченном  $\nu$ , предположим сначала, что  $R(\nu) < 0$  и  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ .

Мы можем тогда представить  $H_\nu(z)$  с помощью формулы (10.5.1) и, заменив в ней показательную функцию  $e^{-t^2}$  ее разложением в ряд Тейлора с остаточным членом

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} + \omega_n(t), \quad (10.6.1)$$

где

$$|\omega_n(t)| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!},$$

выполнить почленное интегрирование.

Принимая во внимание, что при  $R(z) > 0$  и  $R(\nu) < 0$

$$\int_0^\infty e^{-2tz} t^{2k-\nu-1} dt = \frac{\Gamma(2k-\nu)}{(2z)^{2k-\nu}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.6.2)$$

находим

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-\nu)_{2k}}{k!} (2z)^{-2k} + r_n(z) \right], \quad (10.6.3)$$

где

$$r_n(z) = \frac{(2z)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \omega_n(t) e^{-2tz} t^{-\nu-1} dt$$

и

$$(-\nu)_{2k} = \frac{\Gamma(-\nu+2k)}{\Gamma(-\nu)} = (-\nu)(-\nu+1)\dots(-\nu+2k-1), \quad (10.6.4)$$

$$(-\nu)_0 = 1.$$

Пусть теперь  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ ,  $\delta$  — произвольное малое фиксированное положительное число. Оценка по модулю в этом случае дает \*)

$$|r_n(z)| \leq \frac{(2|z|)^{-R(\nu)} e^{\frac{\pi}{2} |\nu|}}{|\Gamma(-\nu)|(n+1)!} \int_0^\infty e^{-2t|z| \sin \delta} t^{2n+1-R(\nu)} dt = O(|z|^{-2n-2}),$$

и формула (10.6.3) может быть записана в виде

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-\nu)_{2k}}{k!} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right]. \quad (10.6.5)$$

Покажем, что полученный результат остается справедливым при произвольных  $\nu$ . Действительно, предположим, что вместо условия  $R(\nu) < 0$  выполнено только условие  $R(\nu) < 1$ . Воспользовавшись рекуррентной формулой (10.4.5), представим тогда  $H_\nu(z)$  в форме

$$H_\nu(z) = 2zH_{\nu-1}(z) - 2(\nu-1)H_{\nu-2}(z), \quad (10.6.6)$$

где в правой стороне равенства находятся функции Эрмита с индексами, вещественная часть которых отрицательна. Применяя к этим функциям доказанную формулу (10.6.5), мы после некоторых вычислений снова придем к формуле того же вида и тем самым распространим прежний результат на область значений  $R(\nu) < 1$ . Повторяя это рассуждение, по индукции докажем справедливость формулы (10.6.5) для любых ограниченных  $\nu$ . Путем некоторого усовершенствования метода доказательства можно также показать, что найденная формула остается справедливой для более широкого сектора  $|\arg z| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta$  (\*\*). Таким образом, для больших значений  $|z|$

\*) Заметим, что если  $a$  и  $b$  — комплексные числа, то

$$|a^b| = |a|^{R(b)} e^{-I(b) \arg a}.$$

\*\*) В этом случае вместо интегрального представления (10.5.1) надлежит воспользоваться формулой

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2tz} t^{-\nu-1} dt,$$

где интегрирование производится по лучу  $\arg t = \alpha$  и  $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$ .

имеет место следующее асимптотическое представление функции Эрмита первого рода:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (-\nu)_{2k} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right], \quad (10.6.7)$$

$$|\arg z| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta, \quad \nu - \text{ограничено.}$$

Асимптотические представления для функции  $H_\nu(z)$ , пригодные в других секторах плоскости комплексного переменного, могут быть получены из (10.6.7) с помощью соотношений (10.3.6—7). В самом деле, предполагая, что

$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

мы можем положить

$$\arg(-z) = \arg z - \pi, \quad \arg(-iz) = \arg z - \frac{\pi}{2},$$

причем каждый из аргументов по абсолютной величине будет меньше, чем  $\frac{3\pi}{4}$ . Применяя к функциям Эрмита, входящим в правую часть формулы (10.3.6), равенство (10.6.7), находим

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (-\nu)_{2k} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right] -$$

$$- \frac{\sqrt{\pi} e^{\pi\nu i}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} z^{-\nu-1} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(\nu+1)_{2k}}{k!} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right], \quad (10.6.8)$$

$$\frac{\pi}{4} - \delta \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} - \delta.$$

Аналогичным образом из (10.3.7) и (10.6.7) следует

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (-\nu)_{2k} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right] -$$

$$- \frac{\sqrt{\pi} e^{-\pi\nu i}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} z^{-\nu-1} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(\nu+1)_{2k}}{k!} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right], \quad (10.6.9)$$

$$-\left(\frac{5\pi}{4} - \delta\right) \leq \arg z \leq -\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right).$$

Совокупность формул (10.6.7—9) дает полное описание поведения функции  $H_\nu(z)$  при больших значениях  $|z|$ . В общей области применимости этих формул они не противоречат одна другой, так

как вторые слагаемые в последних двух формулах будут малы по сравнению с первыми и могут быть включены в символ  $O(|z|^{-2n-2})$ .

В заключение заметим, что результаты данного параграфа могут быть весьма просто выведены из общих асимптотических формул для вырожденной гипергеометрической функции (§ 9.12).

### § 10.7. Приложение к математической физике. Краевая задача для параболического цилиндра

Специальные функции, исследованные в настоящей главе, позволяют дать решение краевых задач математической физики, в которых искомая функция является гармонической в области, ограниченной поверхностью параболического цилиндра, и удовлетворяет на этой поверхности граничному условию определенного типа.

Чтобы найти совокупность частных решений уравнения Лапласа, пригодных для рассмотрения данного класса задач, введем систему параболических координат (10.1.1) и будем искать решения в виде произведения (10.1.7), в результате чего получим для определения отдельных множителей уравнения (10.1.8—10).

Если потребовать, чтобы рассматриваемые решения оставались ограниченными во всей области, включая и ее бесконечно удаленную часть, необходимо прежде всего считать параметр  $\lambda$  вещественным числом, которое без ограничения общности можно принять положительным\*). Соответствующее решение уравнения (10.1.8), ограниченное при  $-\infty < z < \infty$ , тогда будет

$$Z = C \cos \lambda z + D \sin \lambda z, \quad \lambda \geq 0. \quad (10.7.1)$$

Если ввести новый параметр  $\nu$ , связанный с параметром  $\mu$  соотношением  $\mu = \lambda c (2\nu + 1)$ , то на основании (10.2.18) общий интеграл уравнения (10.1.9) может быть представлен в виде

$$A = M e^{-\frac{\lambda c}{2} a^2} H_\nu(\alpha \sqrt{\lambda c}) + N e^{\frac{\lambda c}{2} a^2} H_{-\nu-1}(i\alpha \sqrt{\lambda c}). \quad (10.7.2)$$

Из асимптотических формул § 10.6 следует, что

$$H_\nu(\alpha \sqrt{\lambda c}) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\approx} (2\alpha \sqrt{\lambda c})^\nu, \quad H_{-\nu-1}(i\alpha \sqrt{\lambda c}) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\approx} e^{-\frac{\nu+1}{2} \pi i} (2\alpha \sqrt{\lambda c})^{-\nu-1},$$

поэтому для ограниченности решения необходимо положить  $N = 0$ .

С другой стороны, при  $\nu \neq 0, 1, 2, \dots$

$$H_\nu(\alpha \sqrt{\lambda c}) \underset{\alpha \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\lambda c a^2} (|\alpha| \sqrt{\lambda c})^{-\nu-1},$$

\*) Отрицательные значения параметра  $\lambda$  соответствуют тем же значениям постоянной  $\lambda^2$ , что и положительные.

следовательно, требуется принять  $M=0$ . Таким образом, при  $\nu$ , отличном от целого положительного числа, решения, ограниченного при  $\alpha \rightarrow \pm \infty$  и не равного тождественно нулю, не существует.

При целом  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) функция Эрмита переходит в полином Эрмита, и решение уравнения (10.1.9), ограниченное в интервале  $(-\infty, \infty)$ , будет

$$A = Me^{-\frac{\lambda c}{2} \alpha^2} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.7.3)$$

Подставляя найденное значение параметра  $\mu = \lambda c (2n+1)$  в (10.1.10), мы можем записать общий интеграл последнего уравнения в форме

$$B = Pe^{\frac{\lambda c \beta^2}{2}} H_n(i\beta \sqrt{\lambda c}) + Qe^{-\frac{\lambda c \beta^2}{2}} H_{-n-1}(\beta \sqrt{\lambda c}). \quad (10.7.4)$$

Из (10.7.1) и (10.7.3—4) вытекает, что уравнение Лапласа имеет бесконечное множество решений вида

$$u = u_{\lambda, n} = e^{-\frac{\lambda c \alpha^2}{2}} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) \left[ P_{\lambda, n} e^{\frac{\lambda c \beta^2}{2}} H_n(i\beta \sqrt{\lambda c}) + \right. \\ \left. + Q_{\lambda, n} e^{-\frac{\lambda c \beta^2}{2}} H_{-n-1}(\beta \sqrt{\lambda c}) \right] \frac{\cos \lambda z}{\sin \lambda z}, \quad (10.7.5) \\ \lambda \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ограниченных при  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Для внешней задачи, где переменное  $\beta$  изменяется в интервале  $\beta_0 < \beta < \infty$ , следует, принимая во внимание асимптотические формулы

$$H_n(i\beta \sqrt{\lambda c}) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\approx} i^n (2\beta \sqrt{\lambda c})^n, \quad H_{-n-1}(\beta \sqrt{\lambda c}) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\approx} (2\beta \sqrt{\lambda c})^{-n-1},$$

положить  $P_{\lambda, n} = 0$ . Напротив, в случае внутренней задачи, где  $0 \leq \beta < \beta_0$ , требуется принять  $Q_{\lambda, n} = 0$ .

Действительно, из формулы

$$(\text{grad } u)^2 = \frac{1}{c^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

следует, что для конечности  $\text{grad } u$  вдоль линии  $\alpha = \beta = 0$  необходимо, чтобы

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right]_{\alpha = \beta = 0} = 0.$$

Подставляя в это равенство найденное выше выражение для  $u$  (10.7.5), получим \*)

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right]_{\alpha=\beta=0} = \left( \sqrt{\lambda c} Q_{\lambda, n} \cos \lambda z \right)^2 = 0,$$

откуда  $Q_{\lambda, n} = 0$ .

Легко проверить, что при  $Q_{\lambda, n} = 0$  выражение

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right]$$

делится на  $\alpha^2 + \beta^2$ , поэтому данное условие является также достаточным (ср. § 8.7).

Таким образом, подходящая совокупность частных решений уравнения Лапласа будет:

для внутренней задачи

$$u = u_{\lambda, n} = P_{\lambda, n} e^{-\frac{\lambda c}{2}(\alpha^2 - \beta^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) H_n(i\beta \sqrt{\lambda c}) \frac{\cos \lambda z}{\sin \lambda z}, \quad (10.7.6)$$

$$\lambda \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

для внешней задачи

$$u = u_{\lambda, n} = Q_{\lambda, n} e^{-\frac{\lambda c}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) H_{-n-1}(\beta \sqrt{\lambda c}) \frac{\cos \lambda z}{\sin \lambda z}, \quad (10.7.7)$$

$$\lambda \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение краевых задач получается путем суперпозиции найденных частных решений.

Предположим для определенности, что мы имеем дело с первой краевой задачей для внутренней области, и примем для упрощения, что функция  $f = f(\alpha, z)$ , входящая в граничное условие

$$u|_{\beta=\beta_0} = f, \quad (10.7.8)$$

а следовательно, и искомое решение  $u = u(\alpha, \beta, z)$  суть четные функции переменного  $z$  (\*\*). Мы допустим, далее, что функция  $f$

\*) В процессе вычислений мы пользуемся формулами  $H_n(0) H'_n(0) = 0$ ,  $H_n(0) H'_{-n-1}(0) = -\cos \frac{n\pi}{2}$ ,  $H'_n(0) H_{-n-1}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), следующими из (10.2.10).

\*\*) Случай, когда  $f$  — нечетная функция  $z$ , исследуется совершенно аналогично, а решение для общего случая получается наложением решений, найденных для четной функции  $f_1 = \frac{1}{2} [f(\alpha, z) + f(\alpha, -z)]$  и нечетной функции  $f_2 = \frac{1}{2} [f(\alpha, z) - f(\alpha, -z)]$ .

может быть разложена в интеграл Фурье

$$f = \int_0^{\infty} f_{\lambda}(\alpha) \cos \lambda z \, d\lambda, \quad -\infty < z < \infty, \quad (10.7.9)$$

где

$$f_{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f \cos \lambda z \, dz, \quad (10.7.10)$$

и предположим, что искомая функция также допускает представление в виде интеграла:

$$u = \int_0^{\infty} u_{\lambda}(\alpha, \beta) \cos \lambda z \, d\lambda, \quad -\infty < z < \infty. \quad (10.7.11)$$

Соответственно (10.7.6), мы можем искать  $u_{\lambda}(\alpha, \beta)$  в форме ряда

$$u_{\lambda}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda, n} e^{-\frac{\lambda c}{2}(a^2 - \beta^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) H_n(i\beta \sqrt{\lambda c}), \quad (10.7.12)$$

$$-\infty < \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta < \beta_0.$$

Для определения коэффициентов  $P_{\lambda, n}$  получаем тогда условие

$$f_{\lambda}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda, n} e^{-\frac{\lambda c}{2}(a^2 - \beta_0^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) H_n(i\beta_0 \sqrt{\lambda c}), \quad (10.7.13)$$

$$-\infty < \alpha < \infty,$$

откуда, воспользовавшись теоремой разложения по полиномам Эрмита (§ 4.15), находим

$$P_{\lambda, n} e^{\frac{\lambda c}{2} \beta_0^2} H_n(i\beta_0 \sqrt{\lambda c}) = \frac{\sqrt{\lambda c}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda c a^2}{2}} f_{\lambda}(\alpha) H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) \, d\alpha. \quad (10.7.14)$$

Таким образом, значение коэффициента  $u_{\lambda}(\alpha, \beta)$  дается суммой ряда

$$u_{\lambda}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda c}{2}(a^2 - \beta^2 + \beta_0^2)} \frac{H_n(i\beta \sqrt{\lambda c})}{H_n(i\beta_0 \sqrt{\lambda c})} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\lambda c}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda c a^2}{2}} f_{\lambda}(\alpha) H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) \, d\alpha. \quad (10.7.15)$$

Подставляя найденное выражение в (10.7.11), получаем формальное решение поставленной задачи.

### § 10.8. Приложение к квантовой механике

Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора имеет вид

$$\psi'' + \left\{ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} x^2 \right\} \psi = 0, \quad (10.8.1)$$

где  $\psi$  — волновая функция,  $m$ ,  $\omega_0$  и  $E$  — масса, собственная частота и полная энергия осциллятора,  $\hbar$  — постоянная Планка\*). Задача квантовой механики состоит в том, что требуется определить такие допустимые значения энергии, при которых уравнение (10.8.1) имеет решение, ограниченное в промежутке  $-\infty < x < \infty$ .

На основании проведенного в § 10.7 исследования уравнения (10.1.9), уравнение (10.8.1) имеет решения, ограниченные в промежутке  $(-\infty, \infty)$  только в том случае, если\*\*)

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega_0}{\hbar} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует

$$E = E_n = \omega_0 \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (10.8.2)$$

Волновая функция выражается через полиномы Эрмита.

#### Упражнения

1. Получить интегральные представления для функций Эрмита

$$H_\nu(z) = \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{-\nu} (t^2 + z^2)^{\frac{\nu}{2}} dt, \quad R(\nu) < 1, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2};$$

$$H_\nu(z) = \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} z \int_0^\infty e^{-t^2} t^{-\nu-1} (t^2 + z^2)^{\frac{\nu-1}{2}} dt, \quad R(\nu) < 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

Указание. Воспользоваться представлением функции  $H_\nu(z)$  через вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода  $G(\alpha, \gamma, z)$  и формулами (9.10.3) и (9.11.6).

\*) См., например, Зоммерфельд [1].

\*\*) Уравнение (10.8.1) совпадает с уравнением (10.1.9), если положить

$$\mu = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \lambda c = \frac{m\omega_0}{\hbar}.$$



2. Получить интегральное представление для произведения функций Эрмита

$$H_{\mu}(z) H_{\nu}(z) = \frac{\Gamma(-\mu-\nu)}{\Gamma(-\mu)\Gamma(-\nu)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{\mu+\nu}[z(\cos\varphi + \sin\varphi)] \cos^{-\mu-1}\varphi \sin^{-\nu-1}\varphi d\varphi,$$

$$R(\mu) < 0, \quad R(\nu) < 0.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться (10.5.1) и перейти в двойном интеграле к полярным координатам.

3. Получить интегральное представление

$$H_{\mu}(z) H_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(-\mu-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t^2-2zt} t^{-\mu-\nu-1} {}_2F_2\left(\begin{matrix} -\mu, -\nu \\ -\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2} \end{matrix}; \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

где  ${}_2F_2$  — обобщенная гипергеометрическая функция (§ 9.14).

У к а з а н и е. Представить с помощью (10.5.1) левую часть в виде двойного интеграла по квадранту ( $0 \leq s < \infty, 0 \leq t < \infty$ ) и перейти к новым переменным  $u = s + t, v = \frac{t}{s}$ .

4. Доказать равенства:

$$[H_{\nu}(z)]^2 = \frac{1}{\Gamma(-2\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t^2-2zt} t^{-2\nu-1} F\left(-\nu, -\nu + \frac{1}{2}, \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad R(\nu) < 0;$$

$$H_{\nu}(z) H_{\nu+1}(z) = \frac{1}{\Gamma(-2\nu-1)} \int_0^{\infty} e^{-t^2-2zt} t^{-2\nu-2} F\left(-\nu-1, -\nu - \frac{1}{2}, \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$R(\nu) < -\frac{1}{2}.$$

5. Показать, что функции Эрмита удовлетворяют интегральному уравнению

$$x^{-\frac{\nu+1}{2}} H_{\nu}(x) = 2 \int_0^{\infty} (xy)^{1/2} J_{-\nu}^2(2xy) y^{-\frac{\nu+1}{2}} H_{\nu}(y) dy, \quad 0 < x < \infty, \quad R(\nu) < 1,$$

6. Доказать, что функции Эрмита с индексом, равным половине нечетного целого числа, могут быть выражены через цилиндрические функции мнимого аргумента. В частности, получить соотношение

$$H_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{1/2} e^{\frac{z^2}{2}} K_{1/4}\left(\frac{z^2}{4}\right), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться интегральным представлением (10.5.1) и выполнить замену переменной  $t = 2z \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{4}$ .

7. Доказать равенство

$$K_0\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n!} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} H_{2n}(x) H_{-2n-1}(y),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty,$$

$K_0(z)$  — функция Макдональда.

У к а з а н и е. Применить теорему разложения по полиномам Эрмита и воспользоваться результатом примера 1.

#### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ X

Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми [1], [2]; Бухгольц [1]; Уиттекер и Ватсон [1]; Смирнов В. И. [1].

Справочники: Градштейн И. С. и Рыжик И. М. [1]; Магнус и Оберхеттингер [1].

## ЛИТЕРАТУРА

- Адамов А. А.  
[1] Вестник Петерб. политехн. ин-та, 5, 127—143, 1906.
- Барнс (Barnes E. W.).  
[1] Quart. J., 39, 97—204, 1908.  
[2] Proc. London Math. Soc. (2), 6, 141—177, 1908.
- Бейли (Batley W. N.).  
[1] Generalized hypergeometric series, Cambridge Tracts, No 32, Cambridge, 1935.
- Бейтман (Bateman H.).  
[1] Partial Differential Equations of Mathematical Physics, N. Y., 1944.  
[2] Математическая теория распространения электромагнитных волн, Физматгиз, 1958.
- Бурунова Н. М.  
[1] Справочник по математическим таблицам, Дополнение № 1, Изд. АН СССР, 1959.
- Бухгольц (Buchholz H.).  
[1] Die Konfluente hypergeometrische Funktion, Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Berlin, Springer, 1953.
- Ватсон (Watson G. N.).  
[1] Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.  
[2] Cambridge Phil. Trans., 22, 290, 1918.
- Гаусс (Gauss C. F.).  
[1] Ges. Werke, III, 123—163.  
[2] Ges. Werke, III, 207—229.
- Гобсон (Hobson E. W.).  
[1] Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.  
[2] Phil. Trans. of the Royal Soc., 187 (A), 443—531, 1896.
- Градштейн И. С. и Рыжик И. М.  
[1] Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
- Гринберг Г. А.  
[1] Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948.
- Грэй и Метьюз (Gray A. and Mathews G. B.).  
[1] Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1949.
- Гурса (Goursat E.).  
[1] Ann. Sci. École Norm. Sup. (2), 10, 3—142, 1881.
- Джексон (Jackson D.).  
[1] Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.
- Джефрис Г. и Джефрис Б. (Jeffreys H. and Jeffreys B.).  
[1] Methods of Mathematical Physics, Cambridge, 1950.
- Диксон и Феррар (Dixon A. and Ferrar F.).  
[1] Quart. J. Math., 4, 193, 1933.  
[2] Quart. J. Math., 4, 297, 1933.
- Диткин В. А. и Кузнецов П. И.  
[1] Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, 1951.

Зоммерфельд (Sommerfeld A.).

[1] Волновая механика, ГТТИ, 1933.

Ингам (Ingham A. E.).

[1] Распределение простых чисел, ОНТИ, 1936.

Клейн (Klein F.).

[1] Vorlesungen über die Hypergeometrische Funktion, Leipzig, 1933.

Корпус (Korouš J.).

[1] Rozpravy České Acad., (2), 37, № 40, 28, № 11, 34, 1928.

Кошляков Н. С.

[1] Mess. of Math., 55, 152—160, 1926.

Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.

[1] Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.

Кузьмин Р. О.

[1] Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

Куммер (Kummer E. E.).

[1] J. für Math., 15, 39—83, 127—172, 1836.

Курант и Гильберт (Courant R. und Hilbert D.).

[1] Методы математической физики, т. I. Гостехиздат, 1952.

Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В.

[1] Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1951.

Лангер (Langer R. E.).

[1] Trans. Am. Math. Soc., 33 (1), 23—64, 1931.

[2] Trans. Am. Math. Soc., 34 (3), 447—480, 1932.

Лебедев А. В. и Федорова Р. М.

[1] Справочник по математическим таблицам, Изд. АН СССР, 1956.

Лебедев Н. Н.

[1] Прикладная математика и механика, 13, вып. 5, 465—476, 1949.

[2] ДАН СССР, 52, № 8, 661—664, 1946.

[3] Прикладная математика и механика, 11, 251—258, 1947.

[4] Некоторые интегральные преобразования математической физики, Автореф. дисс., Изд. ЛГУ, 1951.

Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.

[1] Сборник задач по математической физике, ГИТТЛ, 1955.

Левин В. И. и Гросберг Ю. И.

[1] Дифференциальные уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

Лензе (Lense J.).

[1] Kugelfunktionen, Leipzig, 1950.

Лёш и Шоблик (Lösch F. und Schoblik F.).

[1] Die Fakultät (Gamma-funktion) und verwandte Funktionen, Leipzig, 1951.

Лурье А. И.

[1] Операционное исчисление, Гостехиздат, 1950.

Магнус и Оберхеттингер (Magnus W. und Oberhettinger F.).

[1] Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin, 1948.

Мак Роберт (Mac Robert T. M.).

[1] Spherical Harmonics. An elementary treatise on harmonic functions with applications, N. Y., Dover, 1948.

Нильсен (Nielsen N.).

[1] Handbuch der Theorie der Gamma-funktion, Leipzig, 1906.

[2] Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, Leipzig, 1906.

- Норлунд (Hörlund N. E.)  
[1] Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk, 1, № 2, 1956.
- Оберхеттингер (Oberhettinger F.)  
[1] Tabellen zur Fourier Transformation, Berlin, 1957.
- Риекстыньш Э. Я.  
[1] Ученые зап. Латв. гос. ун-та., 8, № 2, 67—72, 1956.
- Риман (Riemann G. F. B.)  
[1] Ges. Math. Werke, S. 67—84.
- Робен (Robin L.)  
[1] Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales, t. I, II, III. Paris, 1957.
- Сансоне (Sansone G.)  
[1] Orthogonal Functions, Interscience Publishers, N. Y.—London, 1959.
- Сеге (Szegő G.)  
[1] Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
- Смирнов В. И.  
[1] Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1951.  
[2] Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
- Снеддон (Sneddon I.)  
[1] Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
- Сноу (Snow C.)  
[1] Hypergeometric and Legendre Functions with Applications to Integral Equations of Potential Theory, Washington, 1952.
- Сонин Н. Я.  
[1] Math. Ann., 16, 1880.
- Стеклов В. А.  
[1] Изв. Харьковского матем. об-ва, (2), 10, 97—200, 1907.
- Стрэттон (Stratton J. A.)  
[1] Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
- Тихонов А. Н. и Самарский А. А.  
[1] Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.
- Трикоми (Tricomi F.)  
[1] Zeitschr. für angew. Math. und Phys., 6 (4), 257—273, 1955.  
[2] Fonctions hypergéométriques confluentes, Paris, Gauthier-Villars, 1960.
- Уиттекер и Ватсон (Whittaker E. T. and Watson G. N.)  
[1] Курс современного анализа, т. I, II, ГТТИ, 1934.
- Уиттекер и Робинсон (Whittaker E. T. and Robinson G.)  
[1] Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933.
- Успенский И. В.  
[1] Ann. Math., (2), 28, 593—619, 1927.
- Фихтенгольц Г. М.  
[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Гостехиздат, 1951.  
[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Гостехиздат, 1949.
- Флетчер (Fletcher A.)  
[1] A Tables of Complete Elliptic Integrals. Phil. Mag., 36, 517, 1940.
- Флетчер, Миллер и Розенхед (Fletcher A., Miller J. C. P. and Rosenhead L.)  
[1] An Index of Mathematical Tables, N. Y., 1946.
- Фок В. А.  
[1] ДАН СССР, 39, 279—283, 1943.  
[2] Таблицы функций Эйри, Изд. НИИ-108, 1946.  
[3] Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, 1946.

**Франк и Мизес (Frank Ph. and Mises R.).**

- [1] Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.

**Хилл (Hill E.).**

- [1] Proc. Nat. Acad. of Sci., 12, 261—269, 348—352, 1926.

**Черри (Cherry T. M.).**

- [1] J. Lond. Math. Soc., 24, 121—130, 1949.  
[2] Proc. Lond. Math. Soc., 51, 14—45, 1949.  
[3] Trans. Amer. Math. Soc., 86, 224—257, 1950.

**Шохат, Хилл и Уолш (Shohat J., Hill E., Walsh J. L.).**

- [1] A Bibliography on Orthogonal Polynomials. Bulletin of the National Research Council, No 103, Washington, 1940.

**Эрдейи (Erdélyi A.).**

- [1] Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.

**Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми (Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.).**

- [1] Higher Transcendental Functions, vol. I, II, III, McGraw-Hill Book Company, Inc. N. Y. — Toronto — London, 1953.  
[2] Tables of Integral Transforms, vol. I, II, McGraw-Hill Book Company, Inc., N. Y. — Toronto — London, 1954.
-

*Николай Николаевич Лебедев*

Специальные функции и их приложения

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов*

Корректор *Р. Н. Лужкова*

---

Сдано в набор 5/X 1962 г. Подписано  
к печати 8/VI 1963 г. Т-01518. Бумага  
60×90<sup>1/16</sup>. Физ. печ. л. 22,5. Усл. печ. л.  
22,5. Уч.-изд. л. 22,24. Тираж 9 500 экз.  
Цена книги 1 р. 31 к.  
Заказ № 736

---

Государственное издательство  
физико-математической литературы,  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Типография № 2 им. Евг. Соколовой  
УЦБ и ПП Ленсовнархоза.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.